

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Курс лекций «Модели молекулярного и турбулентного переноса.
Полуэмпирические модели турбулентности»
(http://cfд.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/RANS_models)

Лекция 6

Модели с двумя уравнениями для кинетической энергии турбулентности k и диссипации ε

Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)
2023

Уравнение переноса кинетической энергии турбулентности

- Уравнение для кинетической энергии турбулентности $k = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2}$ получается путем свертки уравнений для рейнольдсовых напряжений
- В случае несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} + D_j \right) - \varepsilon$$
 - Турбулентная диффузия $D_j = -\overline{u'_j \left(\frac{u'_i u'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)}$
 - Генерация $P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$
 - Диссипация $\varepsilon = -\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$
- Для замыкания этого уравнения необходимо определить **турбулентную диффузию**, **диссипацию** и соотношение, связывающее напряжения Рейнольдса и кинетическую энергию турбулентности
 - В сжимаемом случае добавляются слагаемые «работа давления» и «давление-растяжение»

Замыкание уравнения для k

- Без привлечения дополнительного уравнения переноса для замыкания уравнения для k можно воспользоваться следующими соотношениями

- Гипотеза Буссинеска $-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_T \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$

- Гипотеза градиентной диффузии $-\overline{u'_i \phi'} \approx \nu_T \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$

- ✓ Если пренебречь корреляцией давления и скорости (для некоторых течений это обосновано на базе данных DNS)

$$-\overline{u'_j \left(\frac{u'_i u'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} = \frac{\nu_T}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

- Замена диссипации линейным масштабом $\varepsilon = C_D \frac{k^{1.5}}{L_t}$

- ✓ Для определения линейного масштаба необходимо привлекать дополнительные соотношения

- Например, во внутренней области ПС $L_t = \kappa \cdot d_w$

- Формула Колмогорова $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$

- Гипотеза Невзглядова-Драйдена $\tau_{xy} \approx a_1 k \Rightarrow \nu_t S = a_1 k$

- Эти гипотезы могут быть дополнены теми или иными демпфирующими функциями, учитывающими близость твердых стенок

Модели с одним дифференциальным уравнением

- На основе уравнения для кинетической энергии турбулентности было построено большое количество различных моделей
 - Emmons (1954)
 - Глушко (1965)
 - Wolfshtein (1967)
 - Bradshow, Ferriss, Atwell (1967)
 - Goldberg (1991)
- Эти модели не намного более универсальны чем алгебраические модели
 - Аналогичные проблемы характерны для моделей, основанных на других переменных
 - ✓ Турбулентное число Рейнольдса
 - Baldwin, Barth (1990)



Практически не используются в настоящее время

Уравнение переноса изотропной диссипации ε

- Это уравнение можно вывести из уравнений Навье-Стокса при помощи процедуры осреднения по Рейнольдсу

- Продифференцировать уравнение Навье-Стокса по координате
- Свернуть с производной пульсации скорости
- Осреднить по Рейнольдсу

$$\overline{2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} [NS]} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = P_\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + D_{\varepsilon,j} \right) - \varepsilon_\varepsilon$$

- Полученное уравнение содержит много слагаемых, которые необходимо моделировать

- Генерация
$$P_\varepsilon = -2\nu \left[\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - 2\nu \cdot \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j}} - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m}}$$

- Диссипация
$$\varepsilon_\varepsilon = -2\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m}}$$

- Турбулентная диффузия
$$D_{\varepsilon,j} = -\nu \cdot \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} - \frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$$

- Обычно предполагают, что генерация, диссипация и коэффициент диффузии для ε пропорциональны аналогичным величинам для k

«Стандартная» k - ε модель

- Высокореинольдсовая модель (Spalding, Launder, 1972)

- Не учитывает влияния стенок

$$\frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot \left(\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \varepsilon$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \nabla \cdot \left(\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$P_k = \nu_T S^2 = -\tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

- Иногда «стандартной» моделью называют низкорейнольдсовые версии Jones, Launder (1973) и Launder, Sharma (1974)

- Константы модели

$$\sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_1 = 1.44, C_2 = 1.92, C_\mu = 0.09$$

- Вырождение однородной изотропной турбулентности $k \sim t^{-\frac{1}{C_2-1}}$
- Турбулентность в поле однородного сдвига
- Закономерности на логарифмическом участке пограничного слоя

$$C_2 = C_1 - \frac{\kappa^2}{\sigma_\varepsilon \sqrt{C_\mu}}$$

- Модификации

- RNG модель
- Kato, Launder, 1993 $P_k = \nu_T S \Omega$

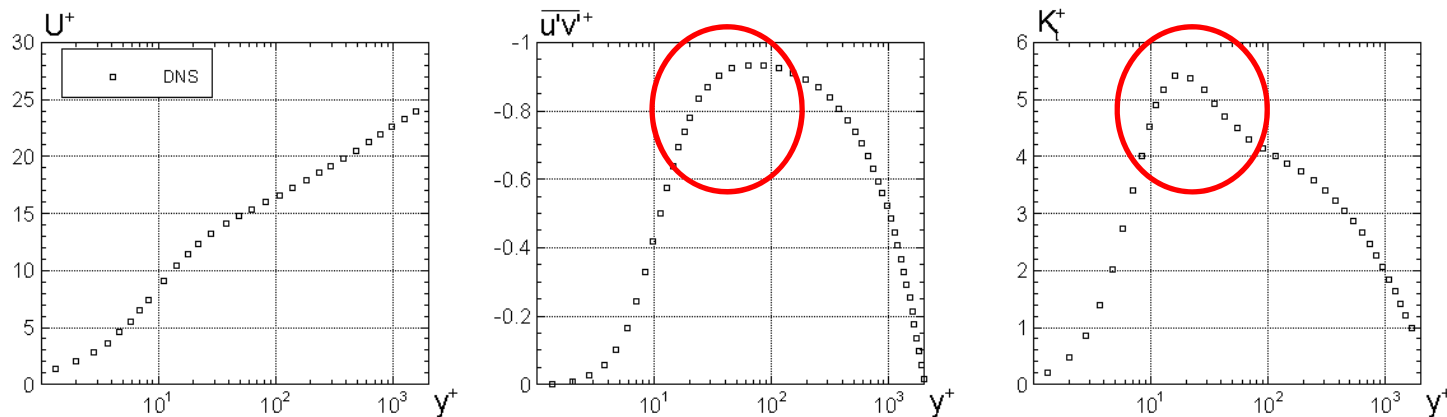
Особенности пристенной турбулентности

- Характерной особенностью пристенной турбулентности является наличие пика k в переходной области
 - В профиле касательного напряжения пика нет
- Это невозможно воспроизвести с использованием формулы Колмогорова

$$\overline{u'v'} = \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$



«Стандартная» k - ε модель не применима в переходной области ПС



Профили скорости, касательного напряжения Рейнольдса и кинетической энергии турбулентности во внутренней области пограничного слоя

Модели типа $k-\varepsilon$

Модели типа $k-\varepsilon$ можно разделить по способу описания влияния пристенных эффектов

- Низкорейнольдсовыые модели
 - Chien
 - Launder-Sharma
 - Для учета влияния стенок в модель вводятся специальные демпфирующие функции
 - ✓ Аналог демпфирующей функции Ван-Дриста
 - Недостаток: получается жесткая система уравнений
- Высокореинольдсовыые модели
 - «Стандартная» модель
 - RNG модель
 - Для учета влияния стенок используются пристенные функции
 - ✓ Основаны на законе стенки
 - Достоинство: возможно использование более грубых сеток
 - Недостаток: предписанный закон стенки

Модифицированная диссипация

- На стенке нет конвекции и генерации турбулентности
 - Уравнение для k преобразуется к виду

$$\varepsilon = \nu \cdot \nabla \cdot (\nabla k) \approx \nu \cdot \frac{\partial^2 k}{\partial n^2}$$

- ✓ Это выражение - граничное условие для ε
- Использование такого граничного условия приводит к существенной дополнительной нелинейности
 - Модели, использующие такое граничное условие, практически неработоспособны
- Диссипацию представляют в виде $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + f_k$
 - Функция f_k удовлетворяет на стенке условию $f_k = \nu \cdot \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}$
 - При удалении от стенки $f_k \rightarrow 0$
- Второе уравнение записывают относительно $\tilde{\varepsilon}$
 - Величины ε и $\tilde{\varepsilon}$ отличаются только около стенки
 - ✓ В уравнении появляется дополнительное слагаемое f_ε
 - ✓ При удалении от стенки $f_\varepsilon \rightarrow 0$

Низкорейнольдсовыe k - ε модели

Большинство низкорейнольдсовых моделей могут быть записаны в следующей общем виде

$$\frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot \left(\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \varepsilon - f_k$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \nabla \cdot \left(\left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} - f_\varepsilon$$

$$v_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

- При формулировке низкорейнольдсовых моделей обычно $\tilde{\varepsilon}$ вместо пишут ε
- В модели необходимы две дополнительные демпфирующие функции
 - Функция f_2
 - ✓ Модифицирует диссипацию в уравнении для ε в пристенке так, чтобы получившаяся величина ε обеспечивала «правильное» поведение k
 - Функция f_μ
 - ✓ Обеспечивает «правильное» поведение v_t в пристенке
 - Касательное напряжение без пика в переходной области

Модель Chien (1982)

- Для построения демпфирующих функций в низкорейнольдсовых k - ε моделях необходим «индикатор» близости к стенке
- Можно использовать расстояние до стенки в переменных закона стенки

➤ Модель Chien (1982)

✓ $f_k = \frac{2\nu k}{d_w^2}$ - линеаризация условия $f_k = \nu \cdot \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}$

✓ $f_\varepsilon = \frac{2\nu\varepsilon}{d_w^2} \exp(-C_4 d_w^+)$

✓ $f_2 = \left(1 - 0.22 \cdot \exp\left(-\left(\frac{\text{Re}_T}{6}\right)^2\right) \right)$, $\text{Re}_T = k^2 / \nu\varepsilon$

✓ $f_\mu = 1 - \exp(-C_3 d_w^+)$

✓ Константы модели

$$\sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_1 = 1.35, C_2 = 1.8, C_3 = 0.0115, C_4 = 0.5, C_\mu = 0.09$$

• Недостатки

- Неопределенность в течениях сложной геометрии
- Нелокальность (нетехнологичность)

Модель Launder, Sharma (1974)

- «Индикатор» близости к стенке построен на основе турбулентных характеристик

➤ Турбулентное число Рейнольдса (Launder, Sharma (1974)) $Re_T = k^2 / \nu \varepsilon$

✓ $f_k = 2\nu(\nabla\sqrt{k}) \cdot (\nabla\sqrt{k})$

✓ $f_\varepsilon = -C_3 \nu v_T [(\nabla\nabla\vec{V}) \cdot \dots \cdot (\nabla\nabla\vec{V})]$

✓ $f_2 = (1 - 0.3 \exp(-Re_T^2)), Re_T = k^2 / \nu \varepsilon$

✓ $f_\mu = \exp\left(-3.4 / (1 + 0.02 Re_T)^2\right)$

✓ Константы модели

$\sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_1 = 1.44, C_2 = 1.92, C_3 = 2.0, C_\mu = 0.09$

- Недостатки

➤ Существенное увеличение нелинейности

✓ Для получения сошедшегося решения необходима сетка $\Delta y_1^+ \leq 0.2$

➤ Демпфирующие функции могут по ошибке «включиться» вдалеке от стенок

- Для низкорейнольдсовых k - ε моделей характерны существенные вычислительные проблемы



Они мало используются в настоящее время

Требования к расчетным сеткам для низкорейнольдсовых моделей

- Сетка должна быть достаточной для разрешения всех особенностей течения
 - При использовании схем различного порядка точности требования к сетке могут меняться
- Турбулентный пограничный слой
 - Около стенки находится вязкий подслой ($y^+ \leq 5$)
 - ✓ Для правильного описания трения 2 точки должны находиться в вязком подслое
 - ✓ Нелинейность турбулентных характеристик ставит дополнительные ограничения
 - Принятый критерий для низкорейнольдсовых моделей $\Delta y_1^+ \leq 1$
 - В некоторых моделях (Лаундер-Шарма) критерий $\Delta y_1^+ \leq 0.2$
 - Профиль скорости во внутренней области существенно нелинейный
 - ✓ Нельзя слишком резко увеличивать шаг сетки
 - Отношение соседних шагов не должно превышать 1.3



Даже при умеренных числах Рейнольдса
необходимо 40-80 точек поперек пограничного слоя

Пристенные функции

- При расчете пристенных течений необходимы граничные условия
 - Газодинамические характеристики
 - Турбулентные характеристики
 - ✓ k и ε
- Можно поместить первый пристенный узел в логарифмическую область пограничного слоя
 - Граничные условия должны базироваться на законе стенки
- Такой подход позволяет
 - Существенно ослабить требования к сетке поперек пограничного слоя
 - ✓ Первый пристенный узел должен находиться в логарифмической области $30 \leq \Delta y_1^+ \leq 100 \div 1000$
 - Использовать высокорейнольдсовы модели для расчета пристенных течений



С начала 70х годов этот подход активно развивается

Основа пристенных функций

- В основе пристенных функций лежат теоретические и экспериментальные закономерности, характерные для логарифмической области пограничного слоя

➤ Логарифмический профиль скорости
$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{y v_*}{\nu} \right) \quad (1)$$

➤ Формула Колмогорова
$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2)$$

- Постоянство касательного напряжения

$$\rho v_*^2 = \tau_w = \tau = \rho(v + v_t) \frac{\partial U}{\partial y} \approx \rho v_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3)$$

➤ Гипотеза локального равновесия
$$P_k = v_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \approx \varepsilon \quad (4)$$

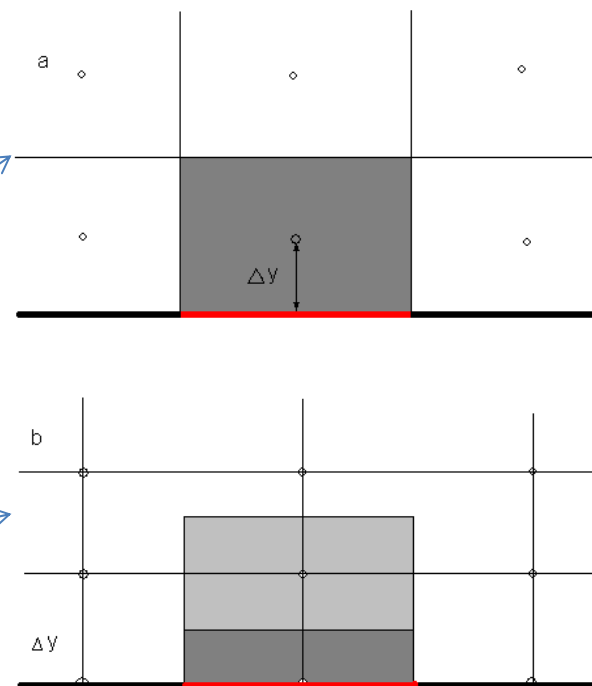
✓ Генерация и диссипация кинетической энергии турбулентности равны

- Формулы (1) - (4) связывают 5 переменных ($U, v_*, v_t, k, \varepsilon$) и недостаточны для постановки граничных условий.
- При помощи несложных преобразований из (1) – (4) можно получить

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{v_*}{\kappa y} \quad \varepsilon = \frac{v_*^3}{\kappa y} \quad k = \frac{v_*^2}{C_\mu^{0.5}} \quad v_t = \kappa y v_*$$

Реализация пристенных функций

- Существует два способа постановки граничных условий с помощью пристенных функций
 - Задание значений в первом пристенном узле
 - Решение уравнений в первом пристенном узле методом конечных объемов
 - ✓ Задание потока на стенке
- Выбор подхода в значительной степени определяется используемым вычислительным кодом
 - Способ решения уравнений
 - ✓ Конечно-разностный
 - ✓ Конечно-объемный
 - Способом хранения данных
 - ✓ Cell centred
 - ✓ Vertex based



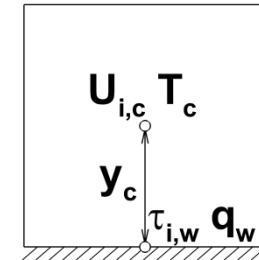
Постановка граничных условий на потоки более универсальна

Современные пристенные функции

- Недостатки традиционных пристенных функций
 - Первый пристенный узел должен лежать на логарифмическом участке профиля скорости $30 \leq \Delta y_1^+ \leq 100 \div 1000$
 - ✓ При измельчении сетки точность расчета падает
 - ✓ В окрестности отрыва этому условию невозможно удовлетворить
 - Низкое u_τ ведет к низкому Δy_1^+
- Современные пристенные функции работают при $\Delta y_1^+ > 1$
 - Масштабируемые пристенные функции (SWF)
- Менгер объединил граничные условия для низкорейнольдсовых моделей и пристенные функции в одном подходе
 - Этот подход работает во всем диапазоне Δy_1^+
 - ✓ Automatic wall treatment (AWT)
 - ✓ Enhanced wall treatment (EWT)
- Пристенные функции могут применяться и с низкорейнольдсовыми моделями
 - При использовании сеток с $\Delta y_1^+ \leq 30$ нельзя использовать высокорейнольдсовые модели

Пристенные функции ANSYS FLUENT

- В пристенной ячейке все потоки, за исключением потока на стенке считаются стандартным образом
 - Поток на стенке вычисляется через U^+ и T^+



$$\tau_{i,w} = \rho_c \cdot (U_{i,c} / U^+(y^+))^2$$

$$q_w = \rho_c \cdot C_{p,c} \cdot u_\tau \cdot (T_w - T_c) / T^+(y^+)$$

- Для вычисления U^+ и T^+ используются эмпирические корреляции Кодера для внутренней области пограничного слоя

$$U^+(y^+) = U_{LIN}^+(y^+) \cdot \exp(-\Gamma_U) + U_{LOG}^+(y^+) \cdot \exp(-1/\Gamma_U), \quad \Gamma_U = \frac{0.01 \cdot y^{+4}}{1 + 5 \cdot y^+}$$

$$U_{LIN}^+(y^+) = y^+ \quad U_{LOG}^+(y^+) = \frac{1}{\kappa} \cdot \log(E \cdot y^+) \quad y^+ = \frac{\rho \cdot y_c \cdot u_\tau}{\mu}, \quad \kappa = 0.4187, \quad E = 9.793$$

$$T^+(y^+) = T_{LIN}^+(y^+) \cdot \exp(-\Gamma_T) + T_{LOG}^+(y^+) \cdot \exp(-1/\Gamma_T), \quad \Gamma_T = \frac{0.01 \cdot (\text{Pr} \cdot y^+)^4}{1 + 5 \cdot \text{Pr}^3 \cdot y^+}$$

$$T_{LIN}^+(y^+) = \text{Pr} \cdot y^+ \quad T_{LOG}^+(y^+) = \text{Pr}_t \cdot [U_{LOG}^+ + P] \quad \text{Pr}_t = 0.85$$

- P - тепловое сопротивление вязкого подслоя

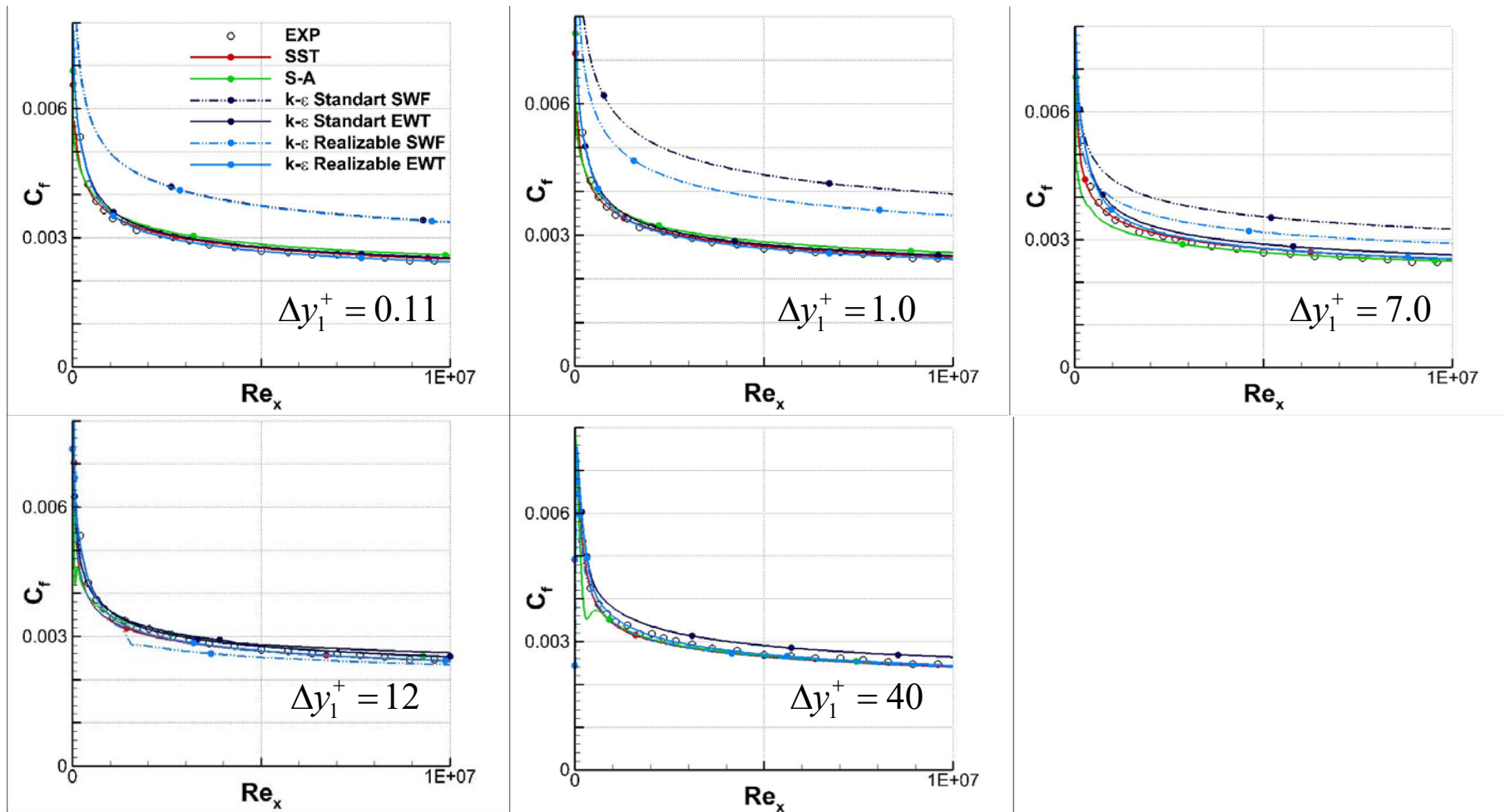
$$P = 9.24 \cdot ((\text{Pr}/\text{Pr}_t)^{3/4} - 1) \cdot (1 + 0.28 \exp(-0.007 \cdot \text{Pr}/\text{Pr}_t))$$

- Динамическая скорость на стенке берется с предыдущей итерации

$$u_\tau = \begin{cases} \sqrt{|\tau_w|/\rho} & \text{for algebraic models} \\ \max(\sqrt{|\tau_w|/\rho}, \sqrt{C_\mu^{0.5} \cdot K_p}) & \text{for differential models} \end{cases}$$

Применение пристенных функций

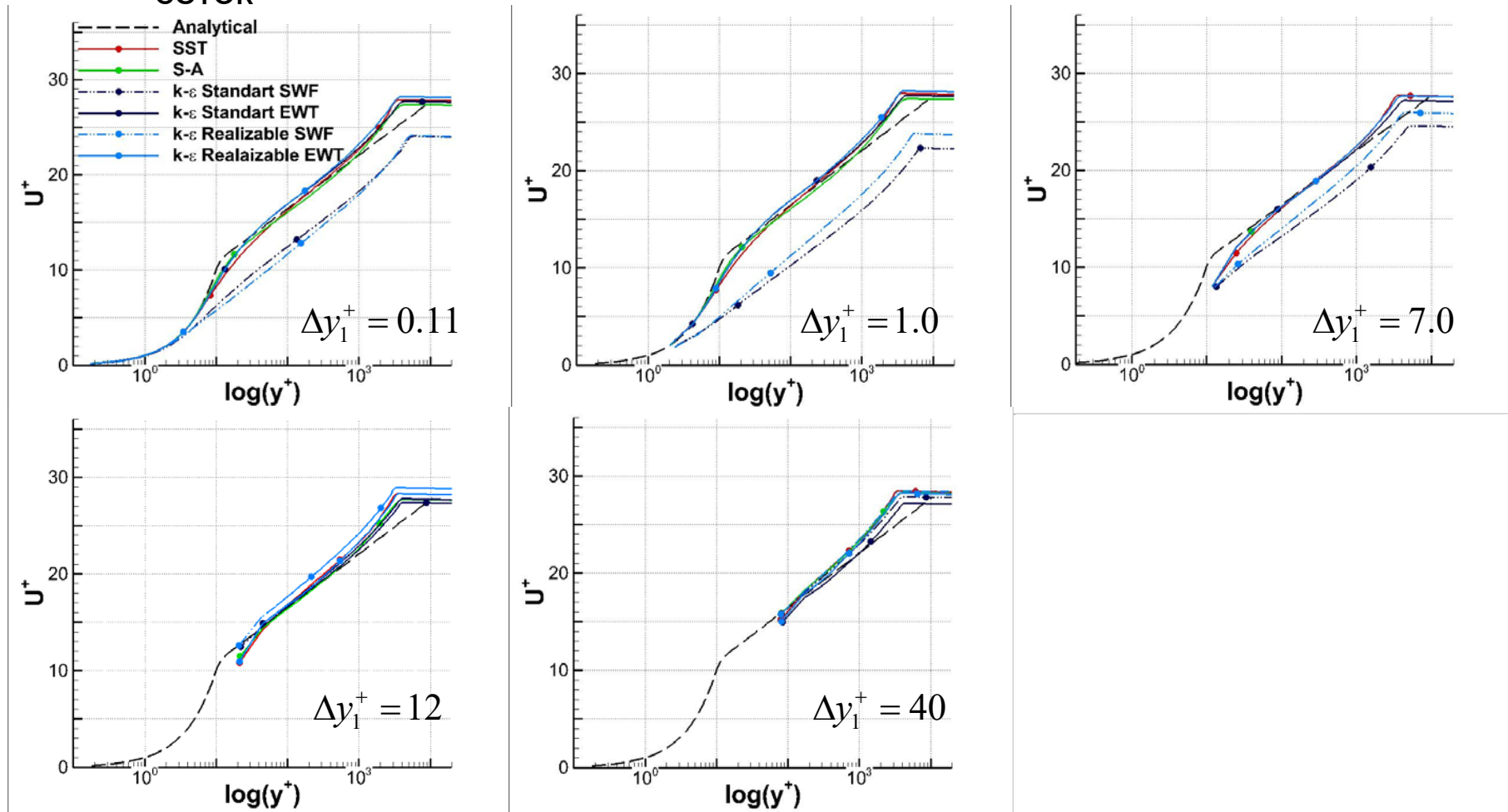
- Турбулентный пограничный слой
 - Стандартные пристенные функции непригодны для низкорейнольдсовых сеток



Коэффициент трения в пограничном слое на плоской пластине

Применение пристенных функций

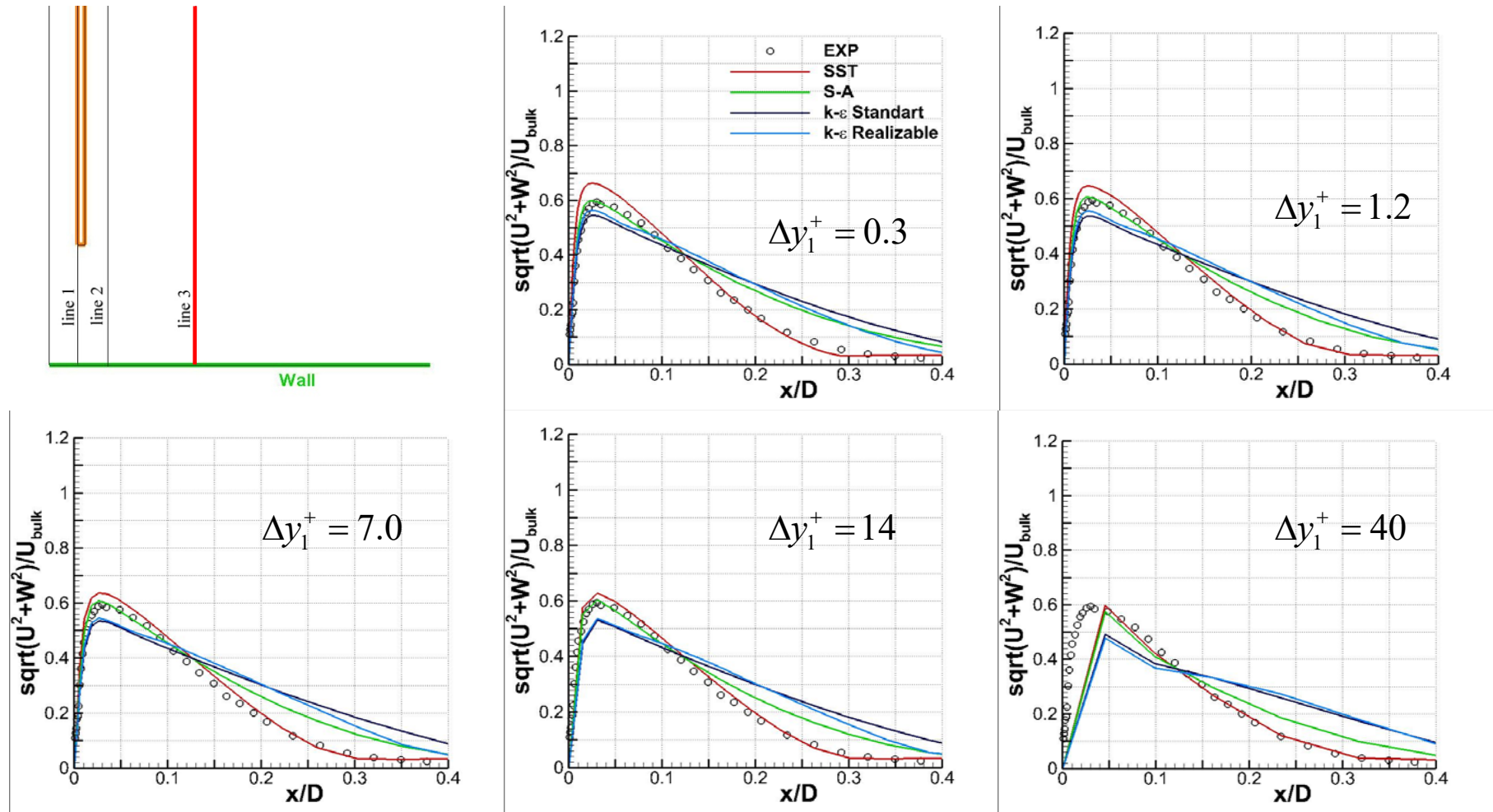
- Турбулентный пограничный слой
 - Стандартные пристенные функции непригодны для низкорейнольдсовых сеток



Профили скорости в переменных закона стенки в пограничном слое на плоской пластине

Применение пристенных функций

- Натекание струи на стенку
 - Толщина пограничного слоя составляет $\delta^+ \approx 30$
 - ✓ В этой задаче высокорейнольдсовы модели неприменимы



Профили скорости в натекающей на стенку струе на линии 3

Гибридные модели

- Гибридные модели (зональные, двухслойные) - еще один способ использования высокорейнольдсовых k - ε моделей турбулентности для расчета пристенных течений
 - Вблизи стенки используется другая модель турбулентности
 - ✓ Алгебраическая
 - ✓ С одним уравнением для k
- Недостатки
 - Алгоритм определения границы между моделями
 - ✓ Автоматическое определение снижает устойчивость
 - ✓ Определение «вручную» неприменимо к областям сложной геометрии
 - «Сшивка» условий для турбулентных характеристик
 - Определение характеристик пограничного слоя, необходимых для алгебраических моделей
 - Неуниверсальность пристенных моделей
- В пакете Fluent при использовании стандартной k - ε модели вблизи стенки можно использовать модель Wolfstein с одним уравнением для k

Достоинства и недостатки моделей типа $k-\varepsilon$

- Достоинства
 - Расчет свободных сдвиговых течений
 - Огромный опыт расчетов
 - ✓ Хорошо изучены их свойства и границы применимости
- Недостатки
 - Проблемы при расчете пристенных течений
 - ✓ Низкорейнольдсовыи модели крайне капризны в вычислительном плане
 - ✓ Применение пристенных функций приводит к ошибкам при расчете отрывных течений (и не только)
 - При расчете пограничных слоев с положительным (неблагоприятным) градиентом давления все модели склонны к завышению генерации кинетической энергии турбулентности
 - ✓ Завышение трения
 - ✓ Затягивание отрыва

В целом модели типа $k-\varepsilon$ постепенно уступают позиции другим моделям

Современные модификации моделей типа k - ε

Модификации направлены на ограничение турбулентной вязкости

- В уравнение переноса для ε добавляется дополнительное слагаемое E

- Основано на сопоставлении двух линейных масштабов, которые должны быть равны на логарифмическом участке профиля скорости

- ✓ Масштаб турбулентности $l = k^{3/2} / \varepsilon$

- ✓ Масштаб, основанный на расстоянии до стенки $l_e = C_\mu^{-3/4} k d_w$

- Наиболее популярными из таких поправок являются поправки

- ✓ Jakirlic, Hanjalic $E = \max \left(\left[\left(\frac{\partial l}{\partial l_e} \right)^2 - 1 \right] \left(\frac{\partial l}{\partial l_e} \right)^2 A \frac{\varepsilon \tilde{\varepsilon}}{k}, 0 \right)$

- ✓ Yap $E = \max \left(\left[\frac{l}{l_e} - 1 \right] \left(\frac{l}{l_e} \right)^2 A \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k}, 0 \right)$

- Поправки предотвращают завышение трения перед отрывом

- ✓ При этом модель становится более нелинейной

- Поправка Като-Лаундера

- Замена генерации кинетической энергии турбулентности K_t

$$P_k = \nu_T S^2 \quad \longrightarrow \quad P_k = \nu_T S \Omega$$

- ✓ Эффективна в окрестности критической точки

Резюме

- Уравнение для переноса кинетической энергии турбулентности – привлекательная основа для построения моделей
- Наиболее естественные модели с двумя уравнениями (k - ε) оказались не самыми удачными
- При расчете пограничного слоя необходимо либо разрешать его до стенки, либо использовать специальные граничные условия – пристенные функции
- Пристенные функции опираются на закон стенки и успешность их работы очень сильно зависит от деталей реализации
- Современные пристенные функции во многих случаях не уступают расчетам с разрешением вязкого подслоя