

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Курс лекций «Модели молекулярного и турбулентного переноса.  
Полуэмпирические модели турбулентности»  
([http://cfд.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/RANS\\_models](http://cfд.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/RANS_models))

## Лекция 8

# Модели типа $k-\omega$

Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)  
2023

# Модели типа $k-\omega$

- Как и  $k-\varepsilon$  модели, основаны на уравнении переноса кинетической энергии турбулентности
- Второе уравнение переноса записывается относительно удельной диссипации  $\omega$  ( $\varepsilon = C_\mu k \omega$ )
- Комбинацию уравнений для  $k$  и  $\omega$  предложил Колмогоров (1942)
- Модели типа  $k-\omega$  активно продвигались с 70х годов усилиями Wilcox'a
  - Эти модели способны к расчету пристенной турбулентности без введения специальных функций
    - ✓ Это выгодно отличает их от  $k-\varepsilon$  моделей

# Модель Wilcox (1988)

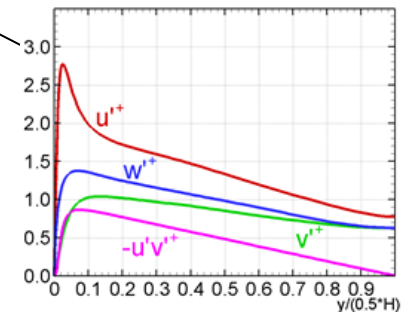
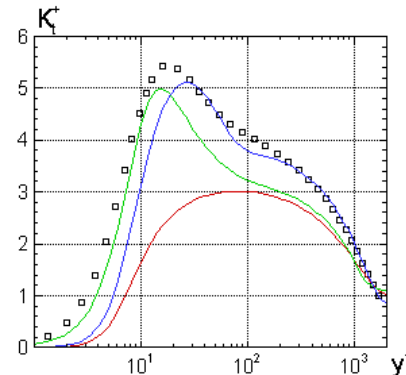
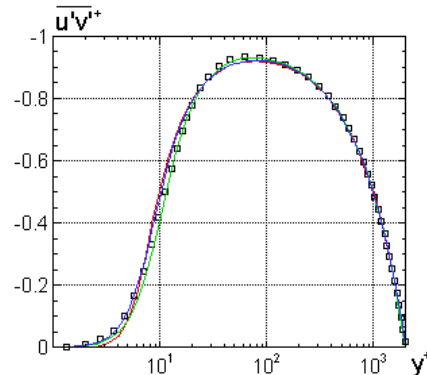
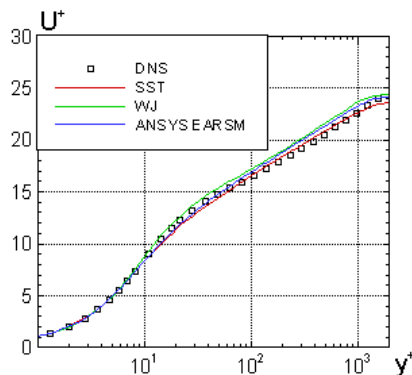
- Простая высокорейнольдсовая модель приемлемо описывает пограничный слой без демпфирующих функций

$$\frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot ((\nu + \sigma_k \nu_T) \nabla k) + P_k - \beta^* \omega k$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot ((\nu + \sigma_\omega \nu_T) \nabla \omega) + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2$$

$$\nu_T = \frac{k}{\omega} \quad \alpha = \frac{5}{9}, \beta^* = 0.09, \sigma_k = 0.5, \sigma_\omega = 0.5, \beta = 0.075$$

- Причина состоит в том, что  $k$ - $\omega$  уравнения НЕ предсказывают пик кинетической энергии турбулентности около стенки
  - Этот пик появляется из-за особенности в  $u'$



# Чувствительность к граничным условиям во внешнем потоке

- При использовании этой модели возникают проблемы при расчете свободных сдвиговых течений
  - Решение очень чувствительно к граничным условиям во внешнем потоке

Течение	$k-\omega$	$k-\varepsilon$	Эксперимент
Дальний след	0.301 – 500	0.256	0.365
Слой смешения	0.103 – 0.141	0.098	0.115
Плоская струя	0.090 – 0.136	0.109	0.100 – 0.110
Круглая струя	0.073 – 0.371	0.120	0.086 – 0.095

# Cross-diffusion term

- Можно вывести уравнение для  $\omega$  из высокорейнольдсовой  $k$ - $\varepsilon$  модели (Menter, 1993)

- В этом уравнении появляется cross-diffusion term  $\frac{1}{\omega}(\nabla k) \cdot (\nabla \omega)$

- ✓ При наличии этого слагаемого чувствительность к граничным условиям пропадает

- Модель эквивалентна высокорейнольдсовой  $k$ - $\varepsilon$  модели

- ✓ Пропадают преимущества во внутренней области пограничного слоя

- Модель Wilcox, 1993

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot ((\nu + \sigma_\omega \nu_T) \nabla \omega) + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \frac{\sigma_d}{\omega} (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)$$

$$\sigma_d = \begin{cases} 0, & (\nabla k) \cdot (\nabla \omega) \leq 0 \\ 0.3, & (\nabla k) \cdot (\nabla \omega) > 0 \end{cases}$$

- В пограничном слое  $\omega$  монотонно убывает от стенки

- ✓ Коэффициент  $\sigma_d=0$  от стенки до максимума  $k$

- ✓ В остальном потоке  $\sigma_d=0.3$

# Cross-diffusion term

- Чувствительность решения к граничным условиям можно проверить на простом течении

➤ Например, развитие слоя смешения во времени (Трошин, 2015)

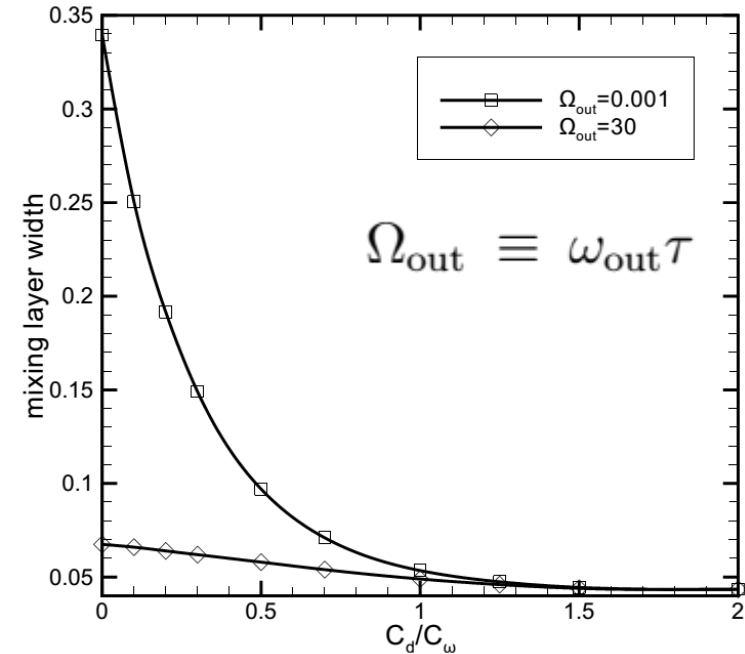
$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ C_k \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \right] + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ C_\omega \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] + \frac{C_d}{C_\mu \omega} \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\omega}{k} \left( C_{\omega 1} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - C_{\omega 2} \varepsilon \right)$$

- Для полного подавления чувствительности к ГУ необходимо, чтобы  $C_d/C_\omega \geq 2$ 
  - При  $C_d < C_\omega$  чувствительность очень сильная



- В модели Menter, 1993 используется «безопасное» значение  $C_d/C_\omega = 2.0$
- В некоторых моделях значение  $C_d$  недостаточно
  - Wilcox, 1993  $C_d/C_\omega = 0.6$



# Модель Ментера SST

- Модели типа  $k-\varepsilon$ 
  - Хорошо предсказывают свойства свободных сдвиговых течений
  - Проблемы при расчете пристенных течений
- Модели типа  $k-\omega$ 
  - Обеспечивают правильное описание пристенной турбулентности
  - Чувствительны к граничным условиям во внешнем потоке
- В значительной части пограничного слоя касательное напряжение пропорционально кинетической энергии турбулентности (Shear Stress Transport – SST)
  - Равновесные течения – гипотеза Невзглядова-Драйдена  $\tau = \rho a_1 k$
  - Неравновесные течения  $\tau = \rho \sqrt{\frac{P_k}{\varepsilon}} a_1 k$
- Модель SST - гибридная модель
  - В пристенной области используется  $k-\omega$  модель
  - Во внешнем потоке используется  $k-\varepsilon$  модель
  - Вязкость ограничена SST

Сложность при создании гибридной модели состоит в формулировке функций, переключающих решение с одной "ветки" на другую

# Модель Ментера SST

$$\frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot ((\nu + \sigma_k \nu_T) \nabla k) + P_k - \beta^* \omega k$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nabla \cdot ((\nu + \sigma_\omega \nu_T) \nabla \omega) + \frac{\gamma}{\nu_T} P_k - \beta \omega^2 + (1 - F_1) \frac{2\sigma_{\omega 2}}{\omega} (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)$$

- Переключение между  $k$ - $\varepsilon$  и  $k$ - $\omega$  моделями осуществляется при помощи функции  $F_1$

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \arg_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0.09\omega d}, \frac{500\nu}{d^2\omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2}k}{CD_{k\omega}d^2} \right]$$

$$CD_{k\omega} = \max(D_{k\omega}, 10^{-20}), D_{k\omega} = \frac{2\sigma_{\omega 2}}{\omega} (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)$$

- Cross-diffusion term
- Набор констант

$$\phi = F_1\phi_1 + (1 - F_1)\phi_2, \phi = \{\sigma_k, \sigma_\omega, \beta\}$$

$$\sigma_{k1} = 0.85, \sigma_{\omega 1} = 0.5, \beta_1 = 0.075,$$

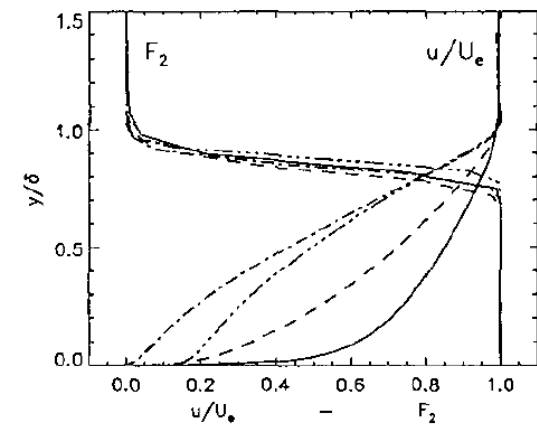
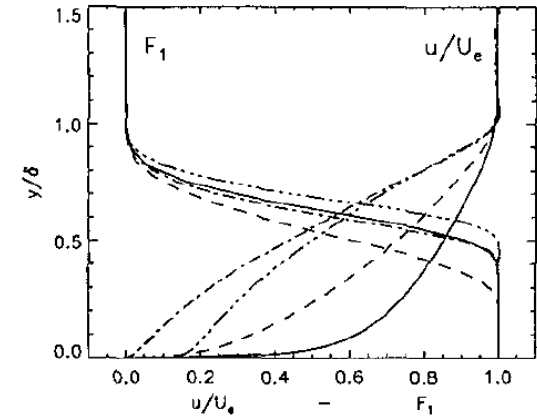
$$\sigma_{k2} = 1.0, \sigma_{\omega 2} = 0.856, \beta_2 = 0.0828$$

- Ограничитель SST

$$\nu_T = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)}, F_2 = \tanh(\arg_2^2), \arg_2 = \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega d}, \frac{500\nu}{d^2\omega} \right)$$

- Константы модели

$$\beta^* = 0.09, \kappa = 0.41, a_1 = 0.31, \gamma = \beta / \beta^* - \sigma_\omega \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}$$





# Модель Ментера SST

- По итогам десятилетнего опыта эксплуатации этой модели в ней было сделано два изменения

- В уравнении для  $k$  генерация  $P_k$  ограничивается  $10\varepsilon$

$$P_k = \min(v_t S^2, 10\beta^* k\omega)$$

- В ограничителе SST величина  $\Omega$  была заменена на  $S$

- ✓ Для более эффективной работы в окрестности критической точки

$$v_T = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)} \quad \longrightarrow \quad v_T = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, S F_2)}$$

- Ограничитель SST может быть применен к другим моделям с двумя уравнениями

- Модифицированная  $k-\varepsilon$  модель Чена в ряде случаев превосходит оригинальную

Модель SST по качеству превосходит все другие модели турбулентности, но по вычислительной простоте и затратам уступает моделям с одним уравнением

# Граничные условия к $k$ - $\omega$ моделям

- Можно показать, что в окрестности стенки диссипация  $\omega$  асимптотически стремится к  $\infty$

$$\omega \xrightarrow{y \rightarrow 0} \frac{6\nu}{\beta_1 y^2}$$

- Такое условие крайне трудно реализовать
  - ✓ Это одна из причин непопулярности моделей Wilcox до 1993 года

- Ментер исследовал различные граничные условия

- В настоящее время используют сформулированное им граничное условие

$$\omega_w = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 \Delta y_1^2}$$

- При сильном изменении пристенного шага вдоль поверхности ведет к неустойчивости
  - ✓ Необходимо использовать ограничители

- Для внешнего потока предложено условие  $\omega = 1 \div 10 \frac{U_\infty}{L}$

- В случае низкого уровня турбулентности

$$v_t = 10^{-3} \nu; k = v_t \omega$$

- При высоком уровне турбулентности

$$k = (Tu \cdot U_e)^2, v_t = \frac{k}{\omega} \quad \text{или} \quad v_t = [0.1 \div 10] \cdot \nu, k = v_t \omega$$

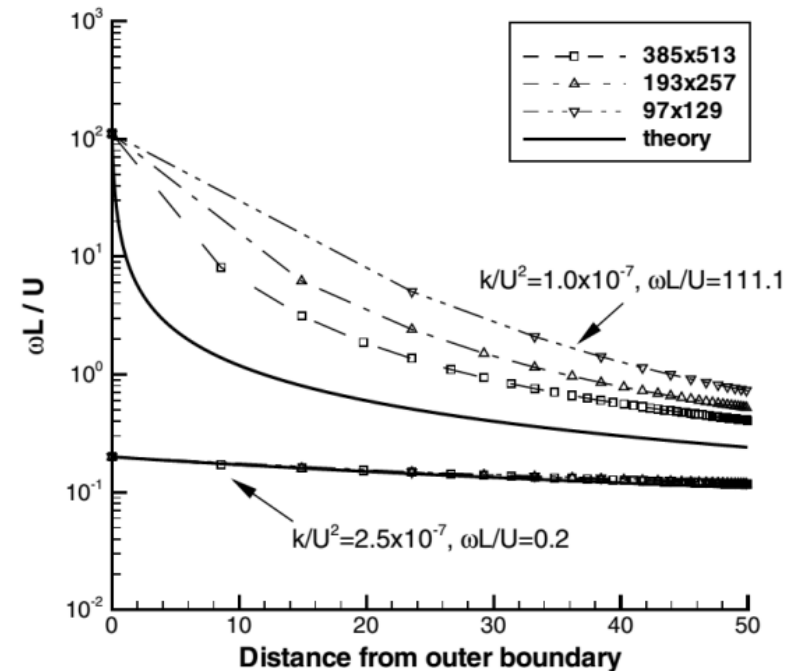
# Влияние расстояния до входной границы

- При расчете внешних задач входная граница располагается достаточно далеко (чтобы граничные условия не влияли на решение)
  - Турбулентные характеристики могут существенно измениться за время прохождения потока до интересующей области

$$k = k_{FS} \left[ 1 + (C_{\varepsilon 2} - 1) \left( \frac{\varepsilon}{k} \right)_{FS} \frac{x}{U} \right]^{C_{\varepsilon 2} - 1}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{FS} \left[ 1 + (C_{\varepsilon 2} - 1) \left( \frac{\varepsilon}{k} \right)_{FS} \frac{x}{U} \right]^{-C_{\varepsilon 2}}$$

$$\nu_t = \nu_{tFS} \left[ 1 + (C_{\varepsilon 2} - 1) \left( \frac{\varepsilon}{k} \right)_{FS} \frac{x}{U} \right]^{\frac{C_{\varepsilon 2} - 2}{C_{\varepsilon 2} - 1}}$$



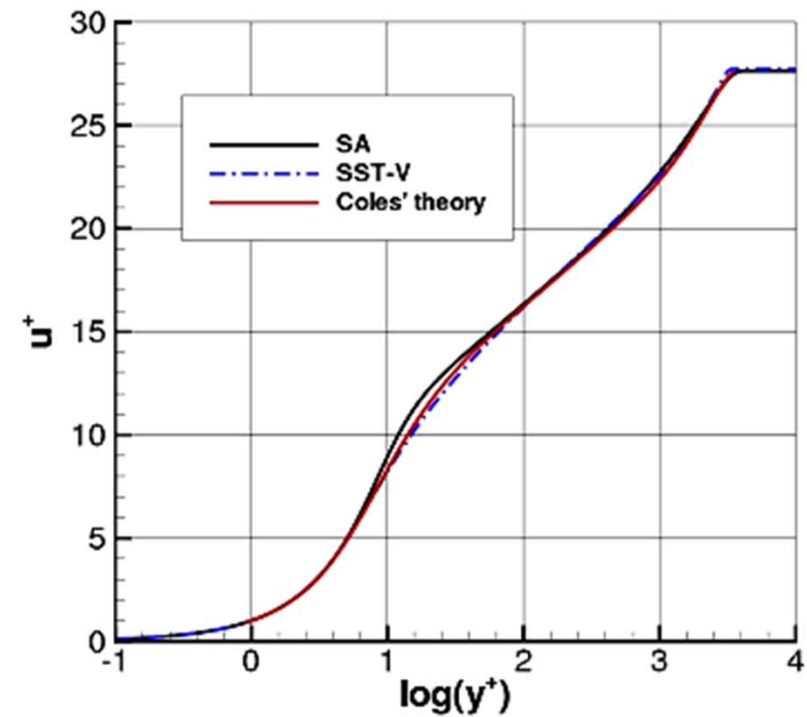
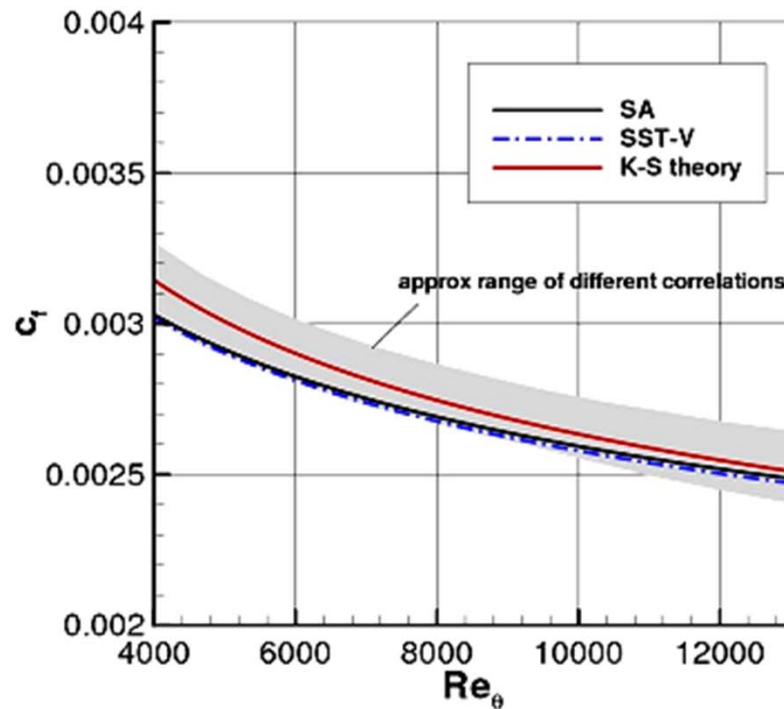
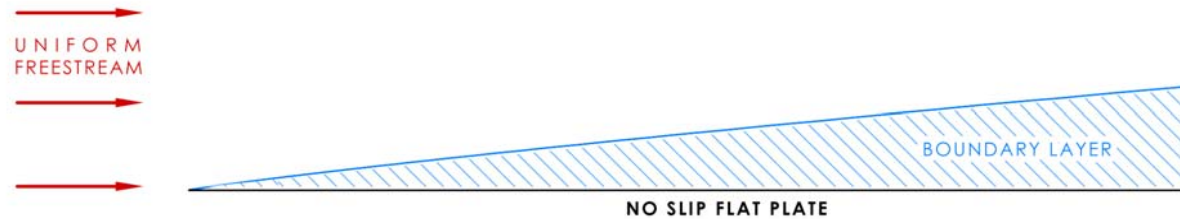
- Spalart, Rumsey, 2007 предложили модификацию модели для умеренных уровней турбулентности ( $Tu < 1\%$ ) на внешней границе

$$\frac{Dk}{Dt} = \mathcal{P} - \beta^* \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \beta^* \omega_{amb} k_{amb}$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\gamma}{\mu_t} \mathcal{P} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \beta \omega_{amb}^2$$

# Примеры применения моделей SA и SST

# Пограничный слой на плоской пластине

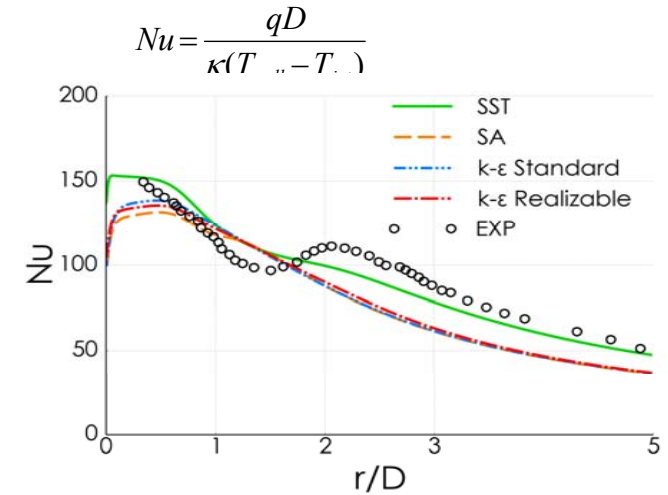


Коэффициент трения и профиль скорости в пограничном слое на плоской пластине

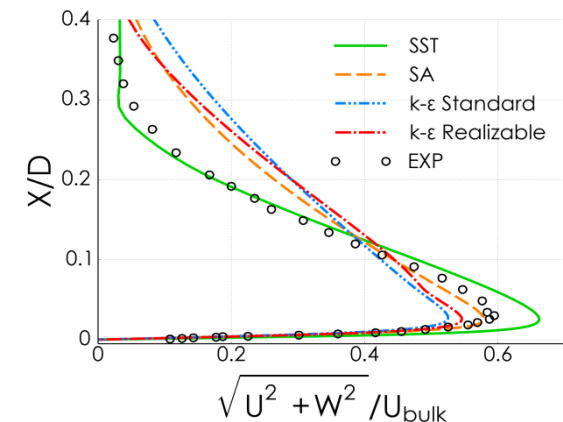
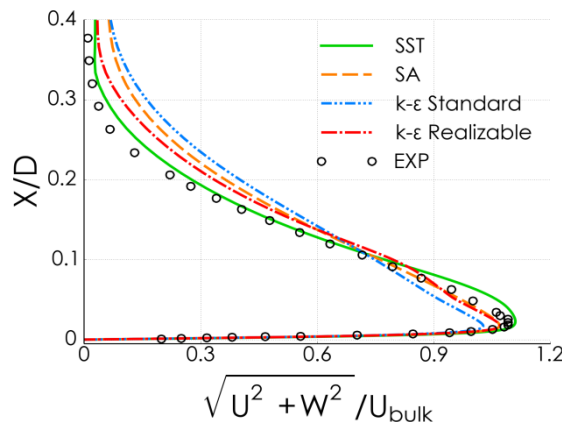
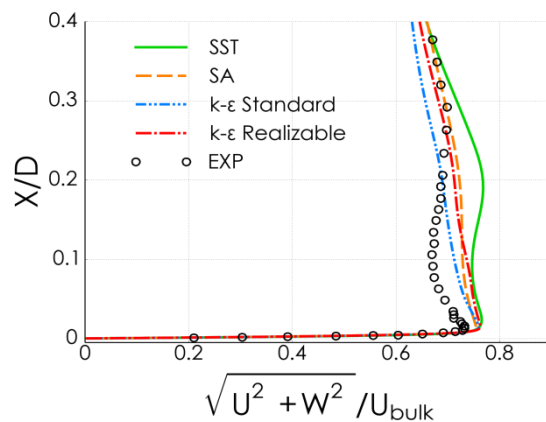
# Натекание струи на стенку



Холодная струя вытекает из сопла диаметром  $D$  и натекает на нагретую стенку

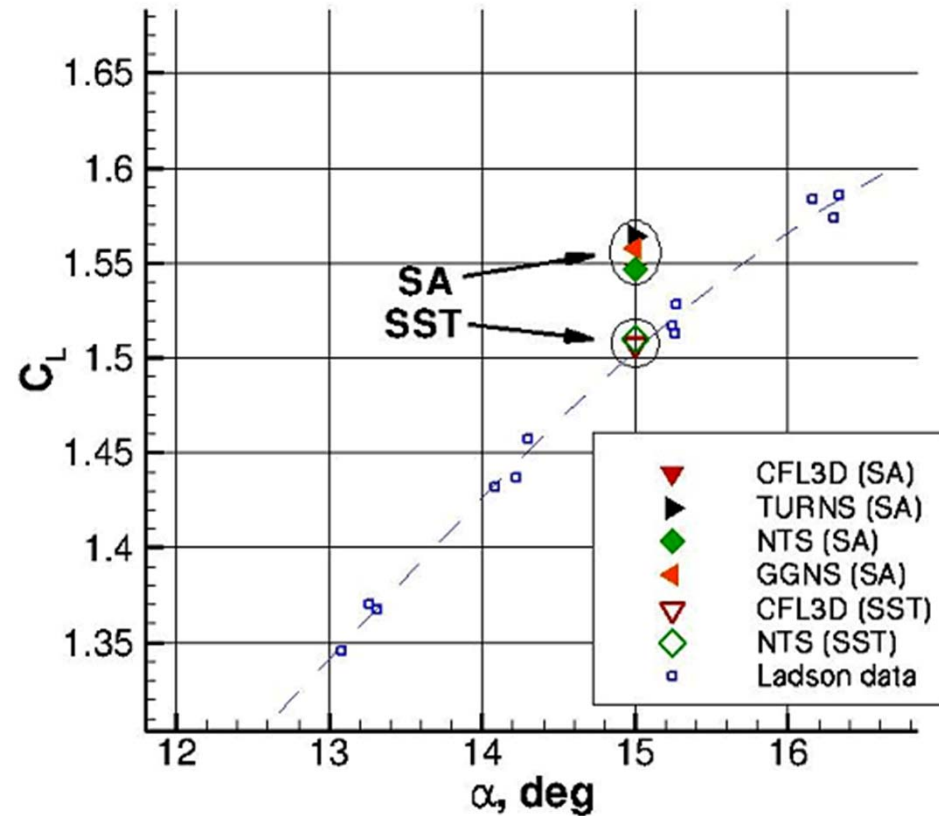


Распределение числа Нуссельта вдоль поверхности



Профили скорости в сечениях  $x/D=0.5, 1.0, 1.5$

# Безотрывное обтекание профиля NASA0012

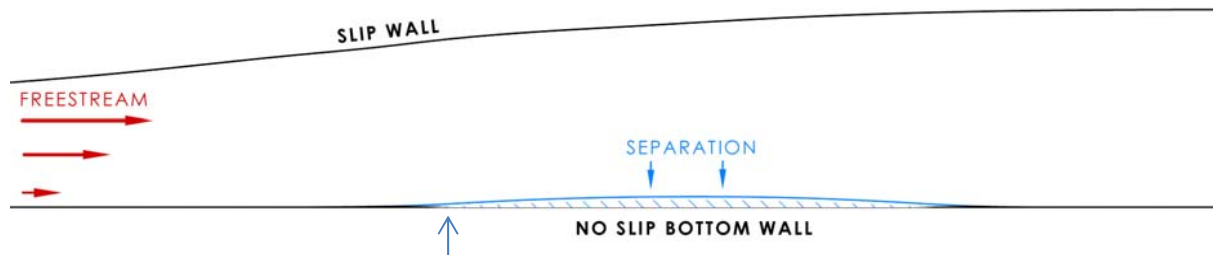


Подъемная сила при угле атаки  $15^\circ$ ,  
рассчитанная с помощью различных CFD кодов

# Отрывные течения



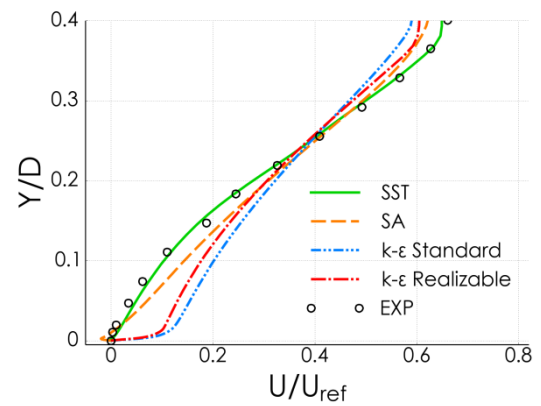
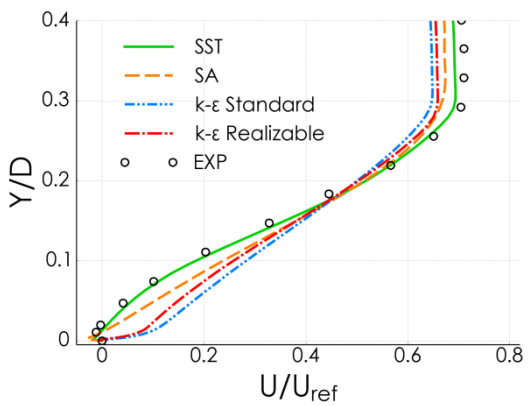
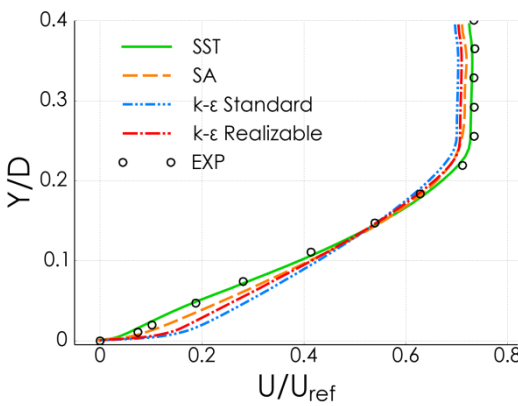
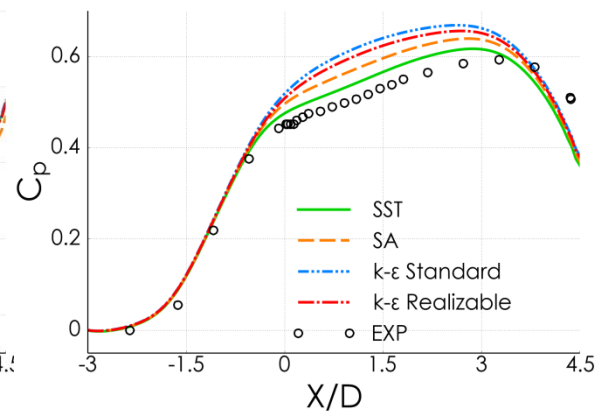
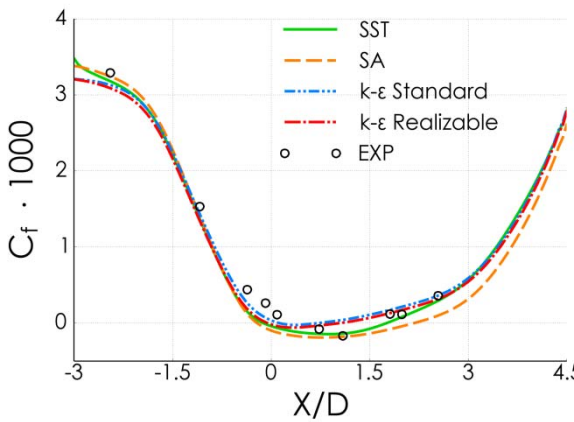
# Течение в осесимметричном диффузоре



Линия тока из эксперимента

Слабый отрыв

Распределение коэффициентов трения и давления



Профили скорости в сечениях  $x/D=0.09, 0.36, 1.63$

# Течение в плоском канале с обратным уступом

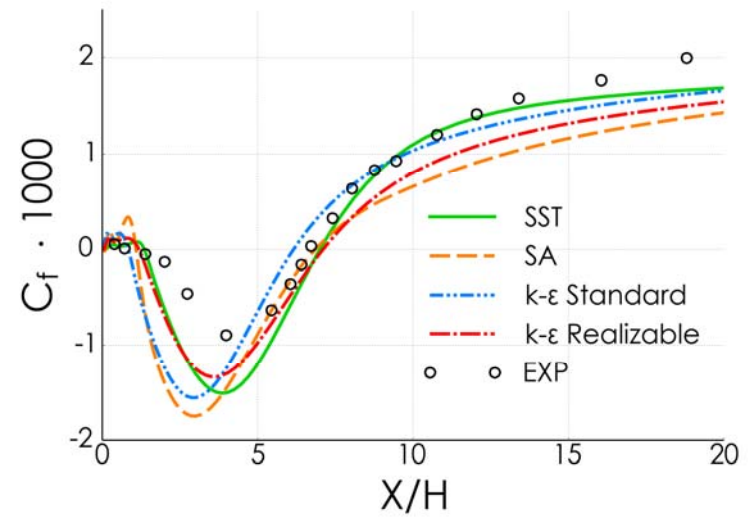
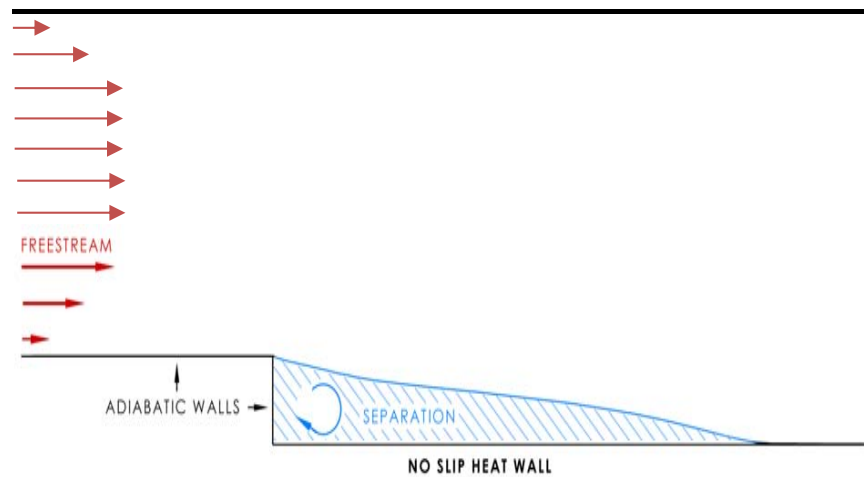
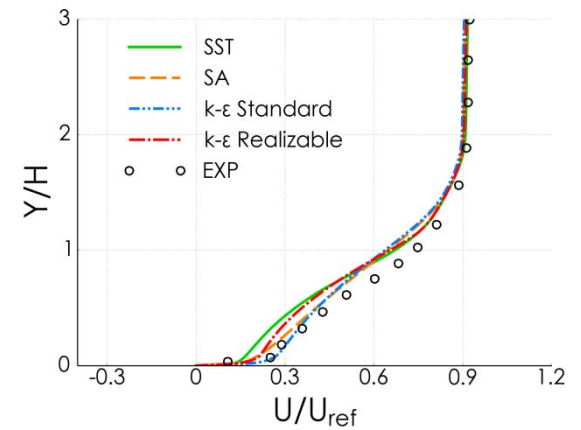
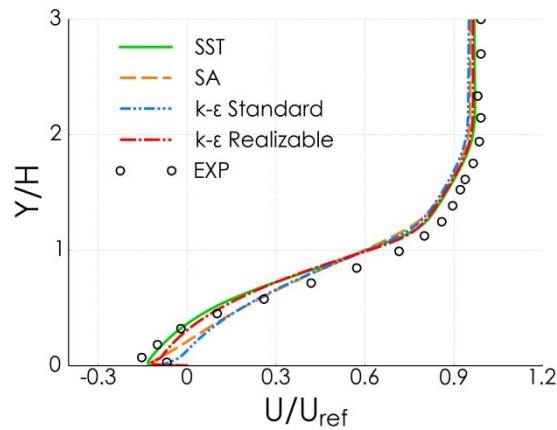
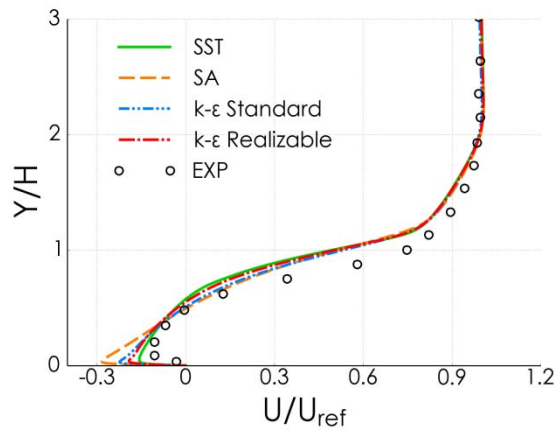


Схема течения и коэффициент трения



Профили продольной скорости в сечениях  $x/D=2.2, 4.76, 8.86$

# Течение в плоском асимметричном диффузоре (диффузор Оби)

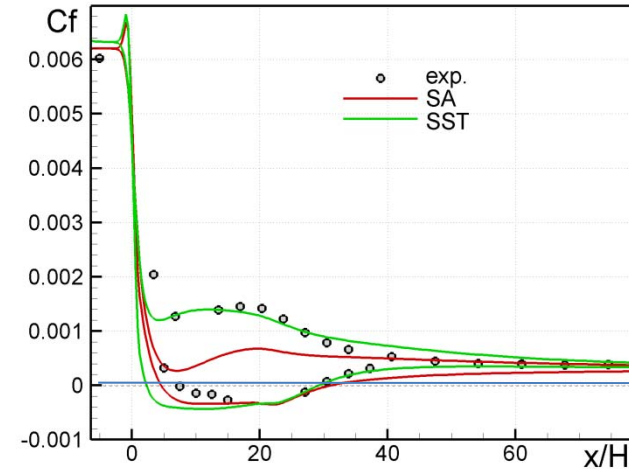
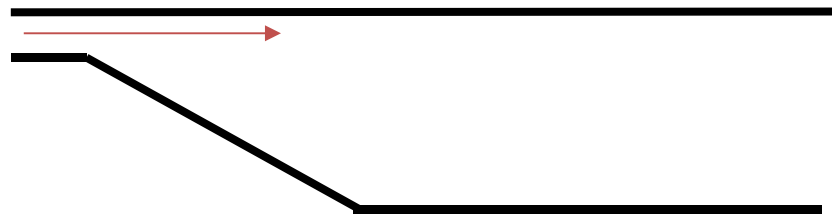
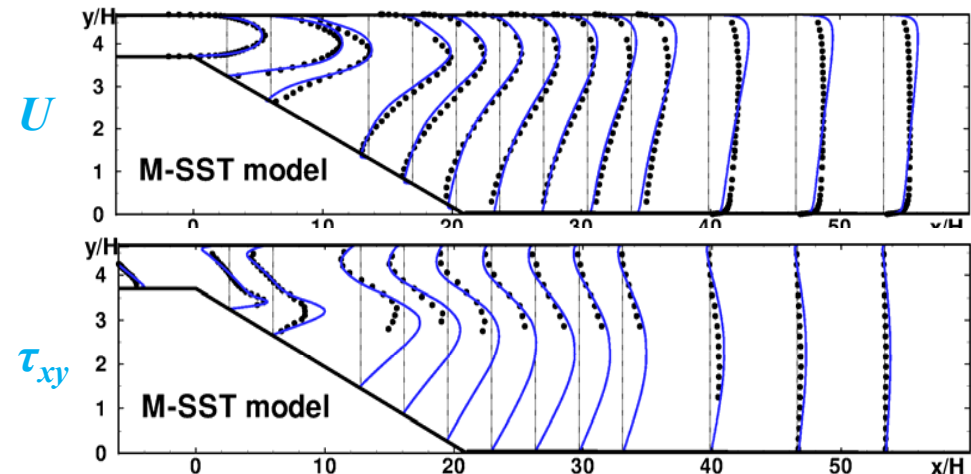
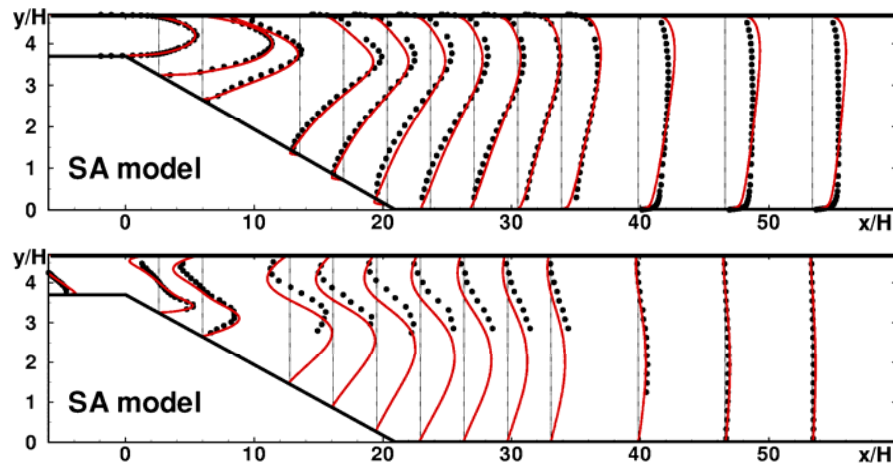
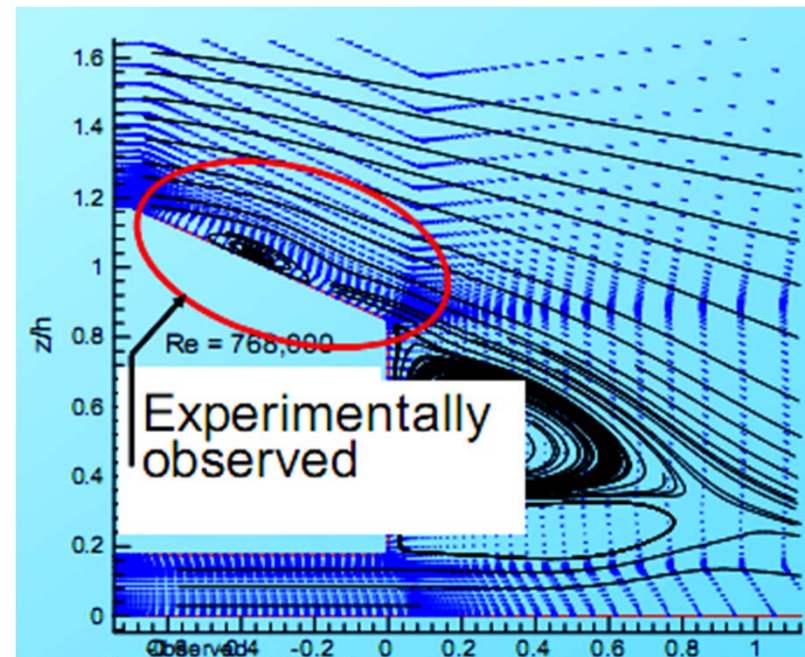
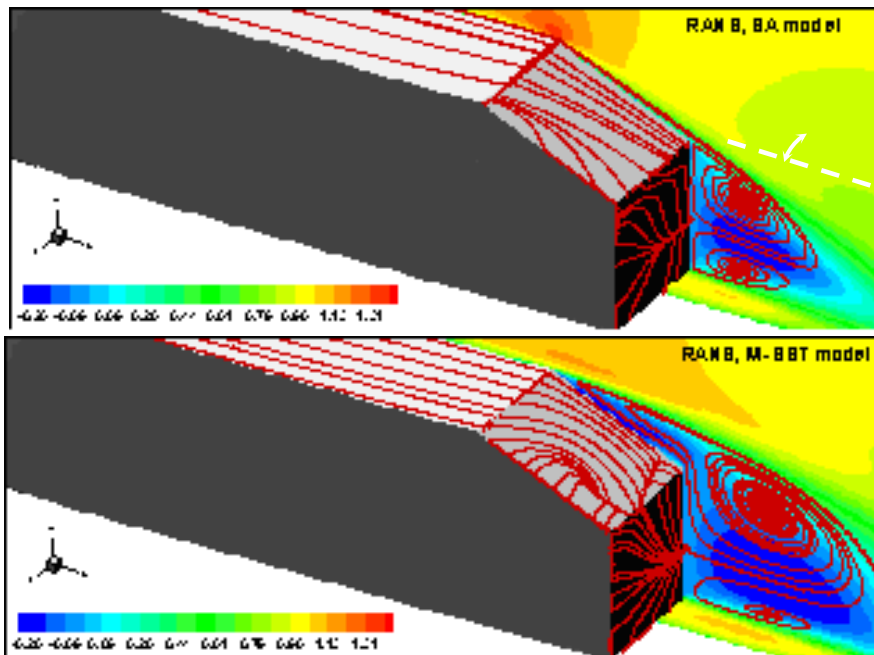
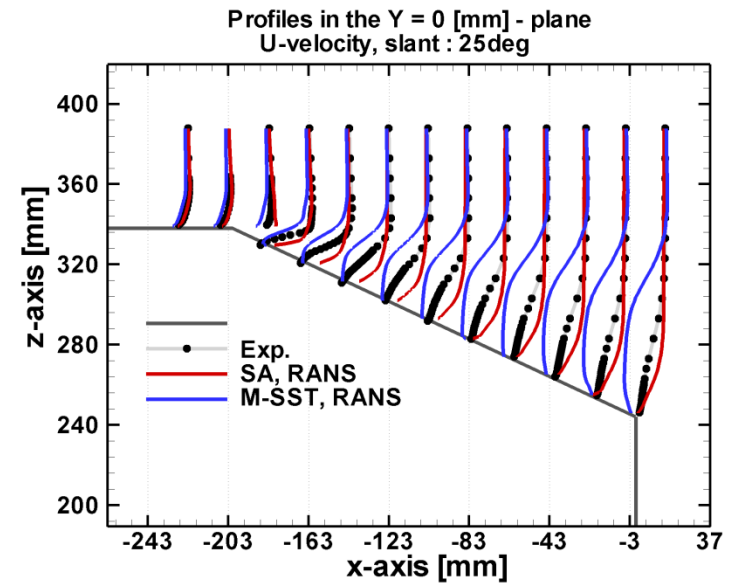
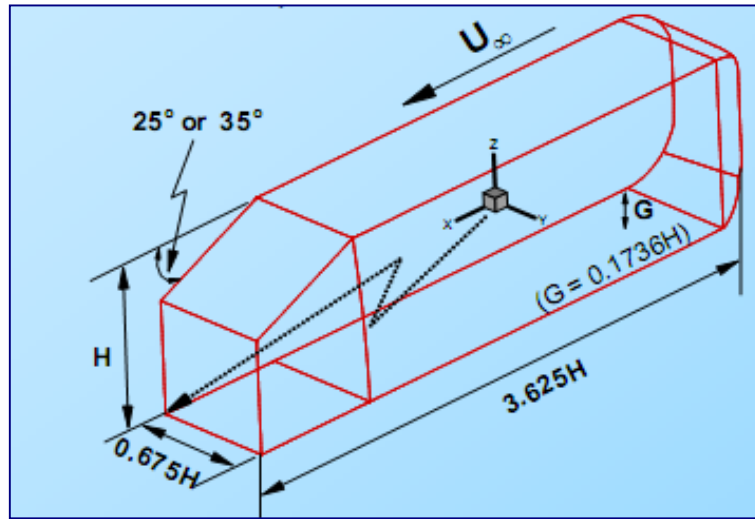


Схема течения и коэффициент трения



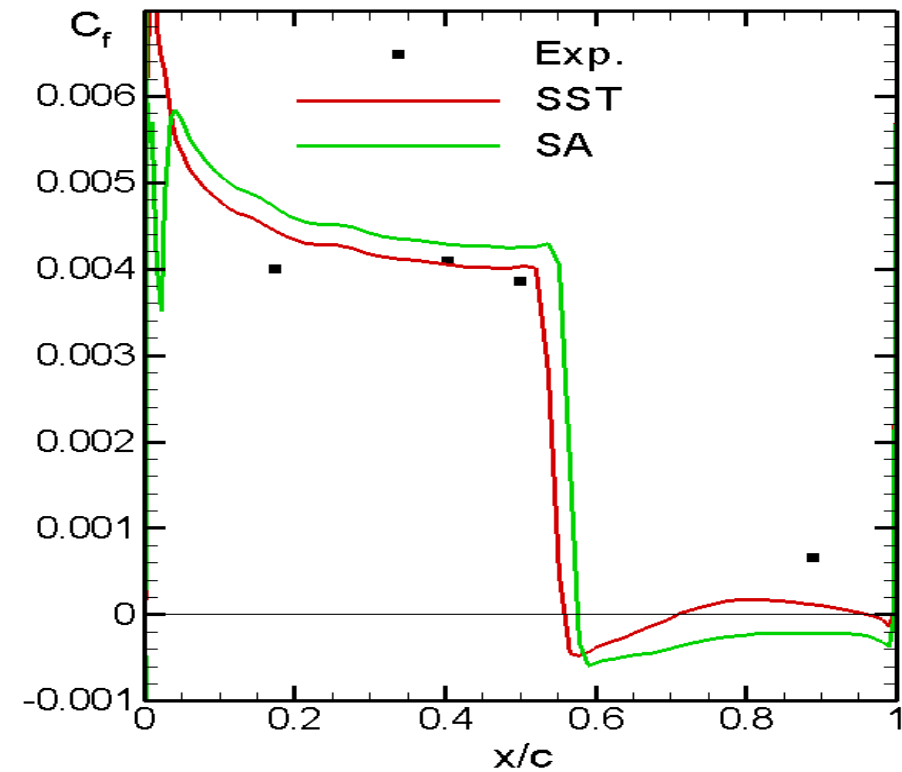
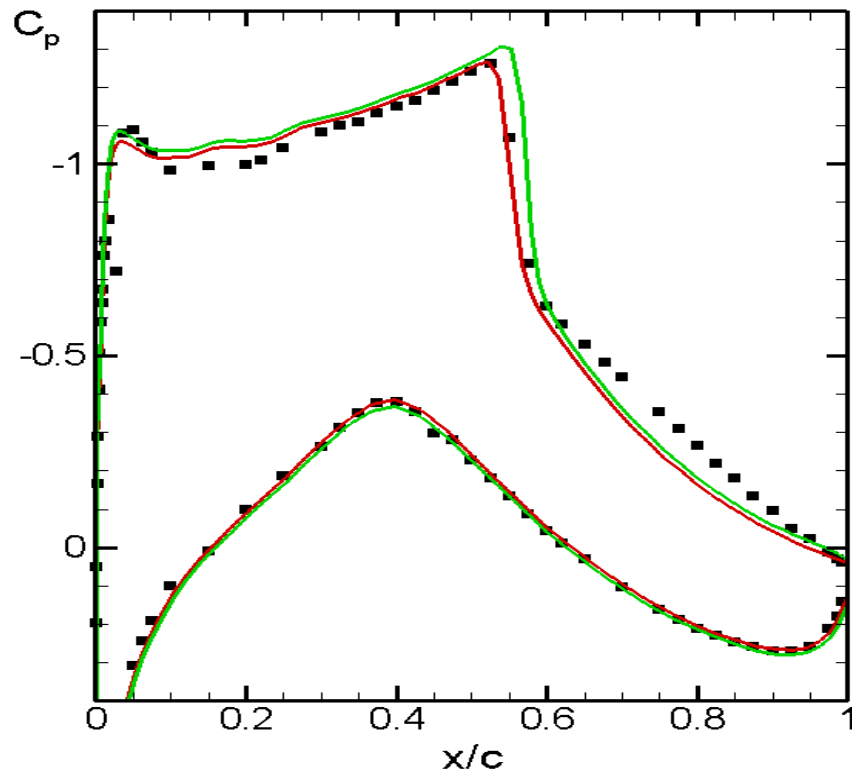
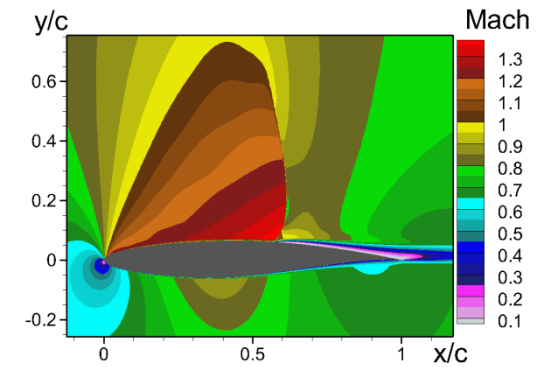
Профили продольной скорости и касательных напряжений

# Обтекание модели автомобиля (Ahmed car)



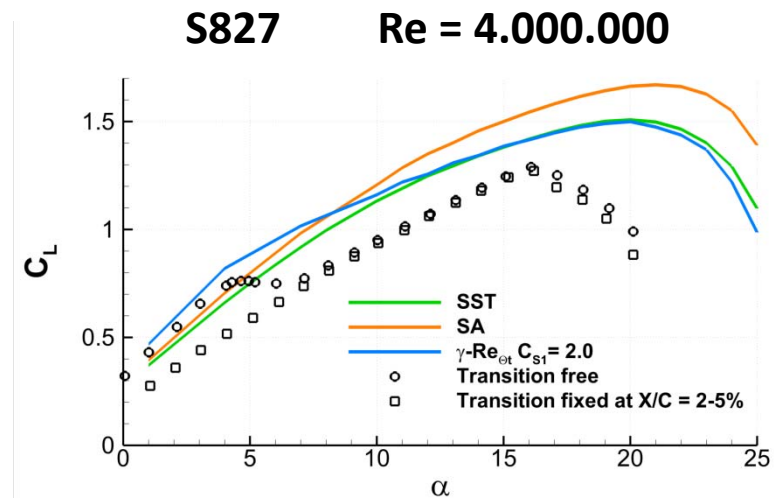
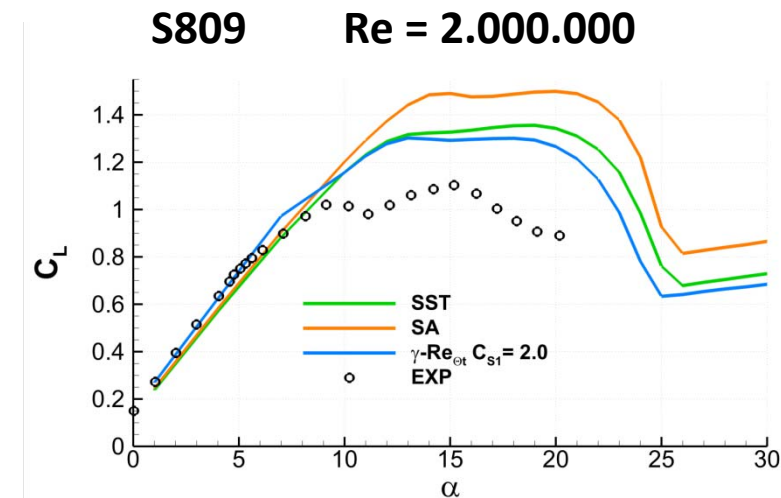
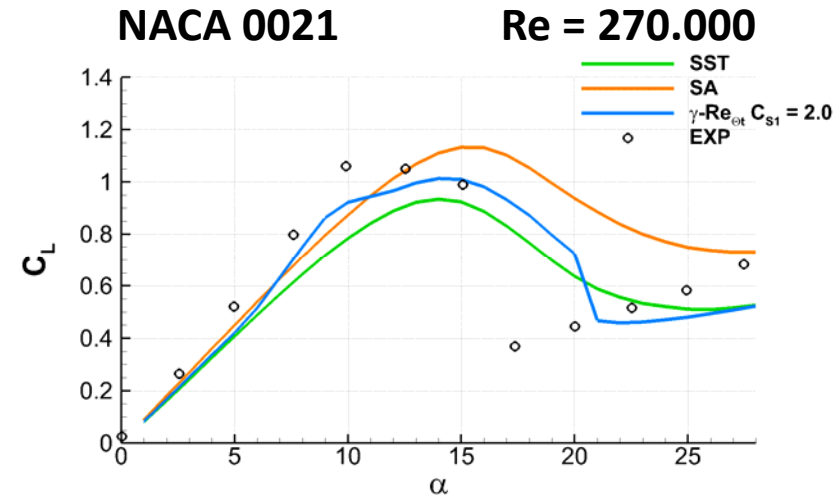
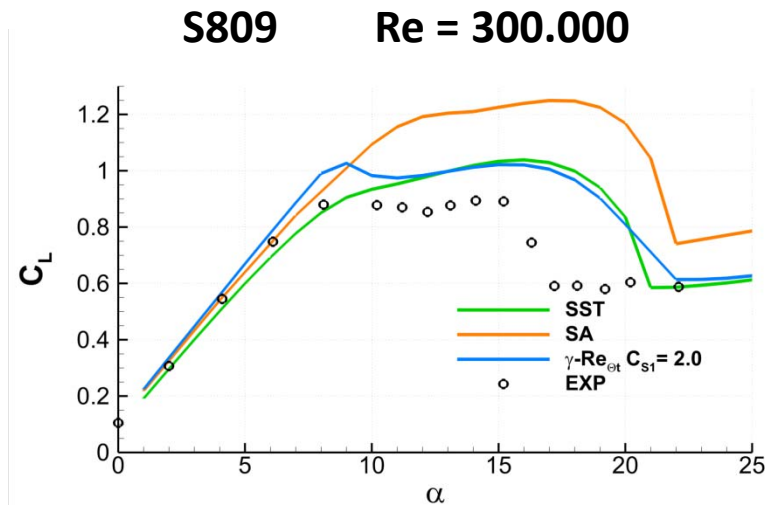
# Трансзвуковое обтекание профиля RAE2822

Отрыв обусловлен наличием скачка



RAE 2822, case 10:  $Re=6.2 \cdot 10^6$ ,  $Mach=0.75$ ,  $\alpha=3.19^\circ$

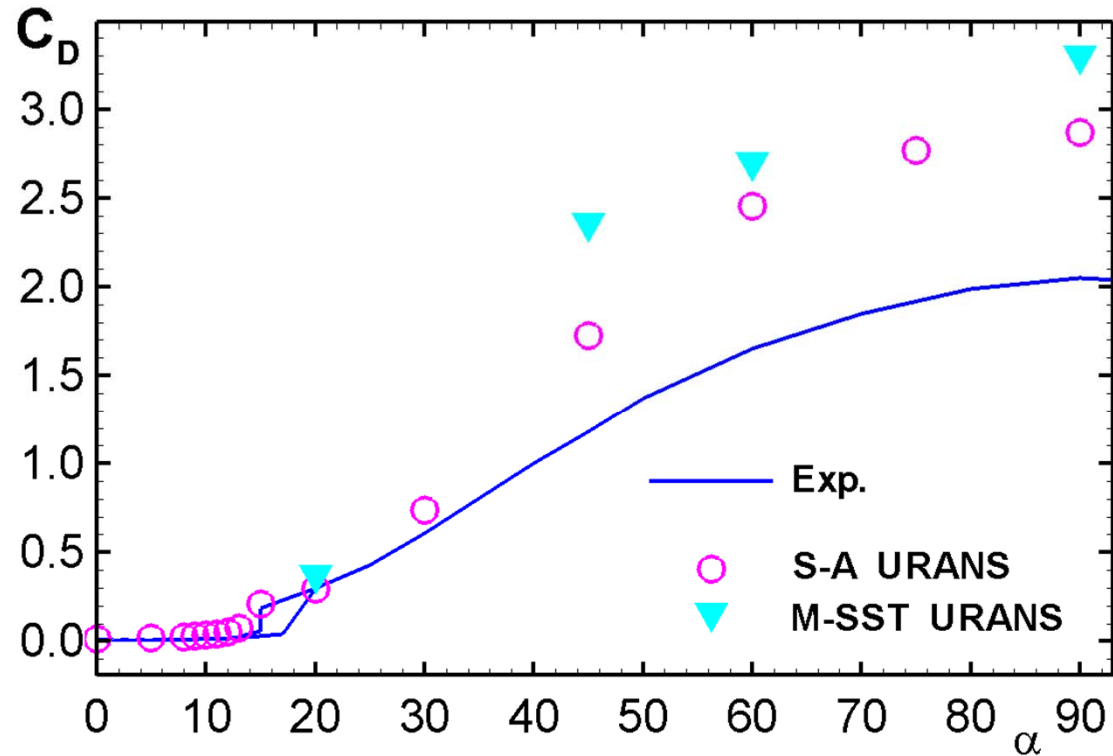
# Обтекание крыловых профилей при переходе к режиму срыва потока



Точность расчета коэффициента подъемной силы оставляет желать лучшего



# Обтекание профиля НАСА0012 при больших углах атаки



Сравнение расчетных зависимостей коэффициента сопротивления от угла атаки при  $Re=10^5$ , полученных с использованием SA и SST моделей, с экспериментальными данными

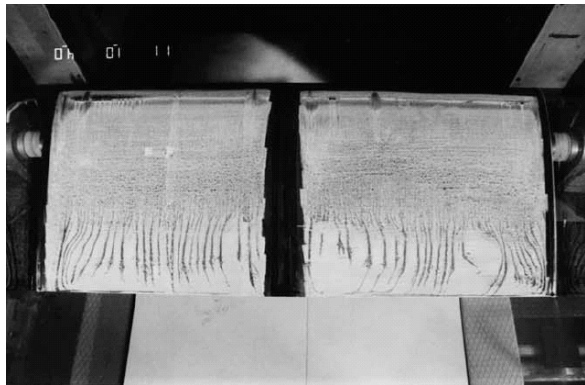
Метод RANS не пригоден для расчета данного течения

## Проблемные течения

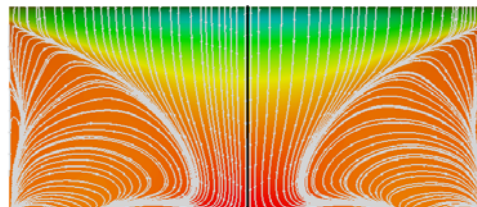


# “Угловой отрыв”

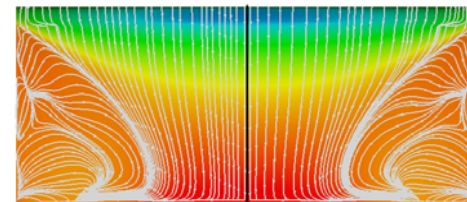
Обтекание А-профиля ONERA



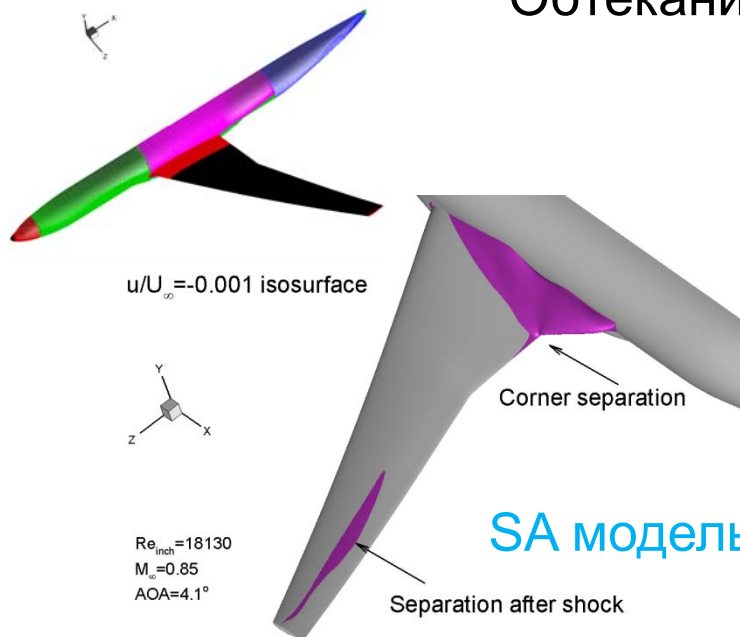
SA модель



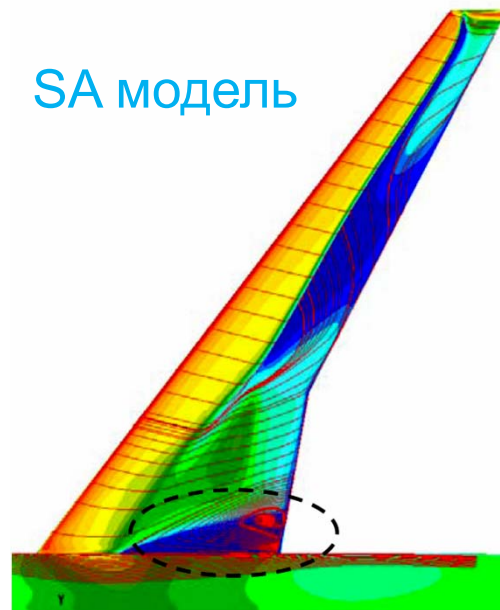
SST модель



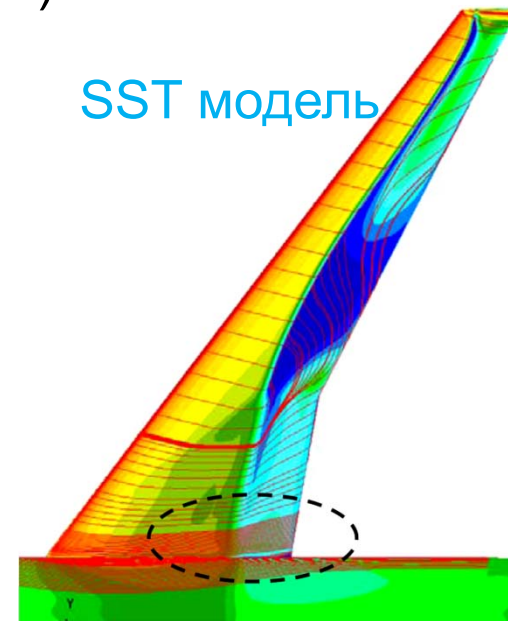
Обтекание модели самолета (CRM)



SA модель



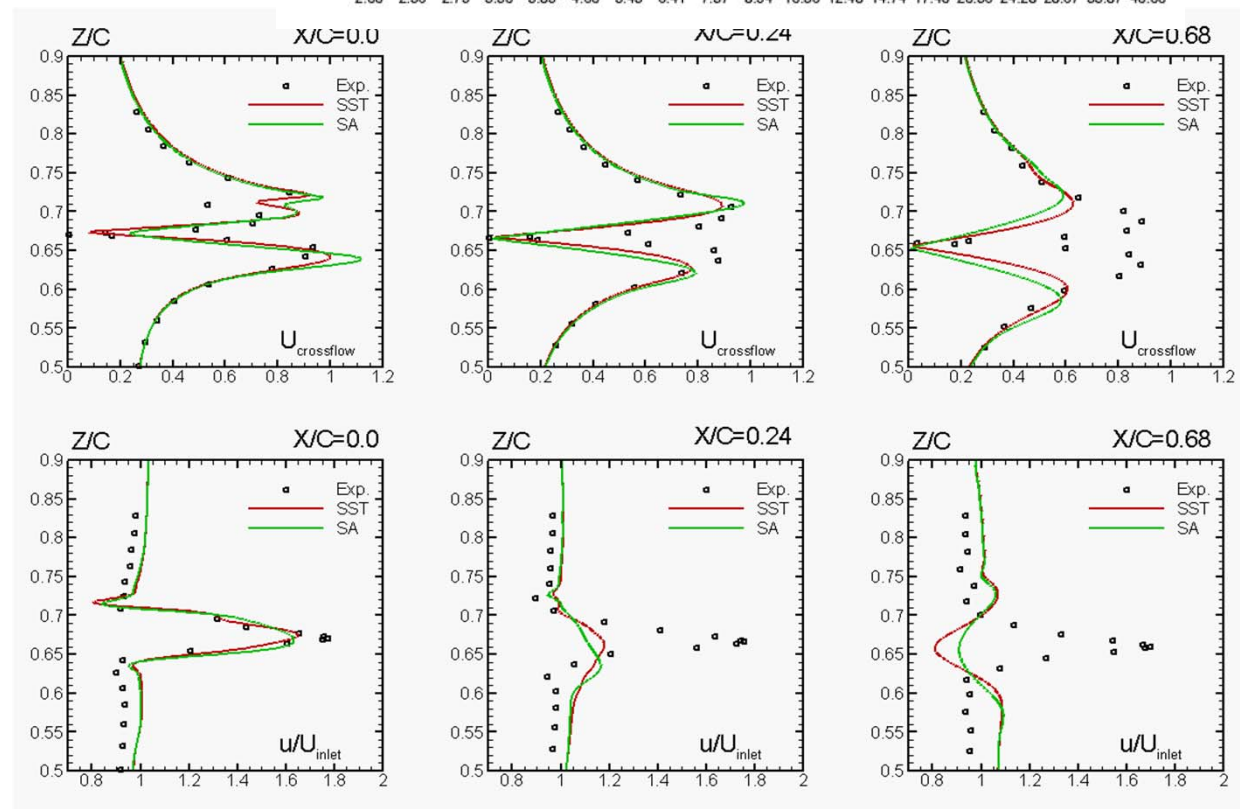
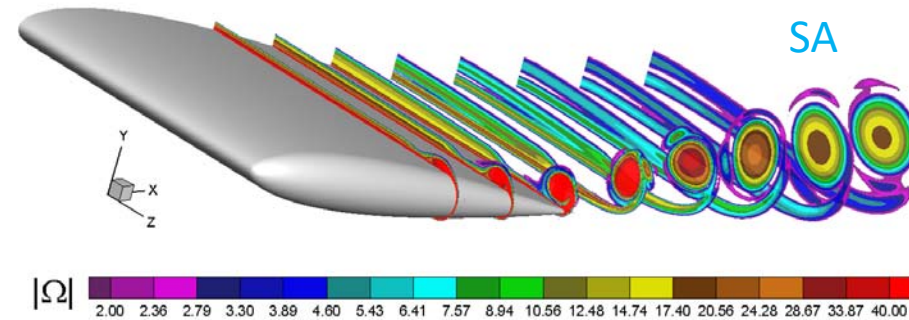
SST модель



Необходимы нелинейные модели

# Обтекание крыла конечного размаха NACA0012 со скругленной боковой кромкой

- Обе модели завышают турбулентную вязкость в вихре
  - Вихрь диссипирует слишком быстро



Необходимы поправки на кривизну линий тока и вращение

## Резюме

- Несмотря на некоторые недостатки,  $k-\omega$  модели являются наиболее удачным видом моделей с двумя уравнениями
- Модель Ментера SST является лучшей моделью в настоящее время, но она несколько уступает моделям с одним уравнением в вычислительной эффективности
- Существует ряд течений, которые невозможно правильно описать даже с помощью лучших моделей SA и SST.
- Иногда помогает использование специальных поправок или более сложных моделей
- Существуют течения, причиной неудачи расчета которых являются не модели турбулентности, а сам подход RANS. В этом случае для правильного предсказания требуются более совершенные и дорогие подходы (LES, гибридные подходы)