Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Курс лекций «Модели молекулярного и турбулентного переноса.
Полуэмпирические модели турбулентности»
(http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/RANS_models)

Лекция 10

Дифференциальные модели рейнольдсовых напряжений

Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)
2023

Гипотеза Буссинеска

- Буссинеск (1877) предложил ввести дополнительную (турбулентную) вязкость
- Большинство моделей турбулентности используют обобщенную гипотезу Буссинеска

$$-\overline{u_i'u_j'} = \nu_T\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}k\delta_{ij} = 2\nu_T \cdot S_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}$$

  - Линейная связь между тензором рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций
  - Аналог реологического закона Ньютона для молекулярной вязкости

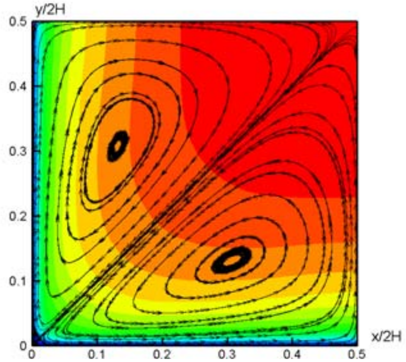
- Достоинства
  - Использование гипотезы Буссинеска позволяет сократить количество определяемых в процессе моделирования переменных с 6 до 1.

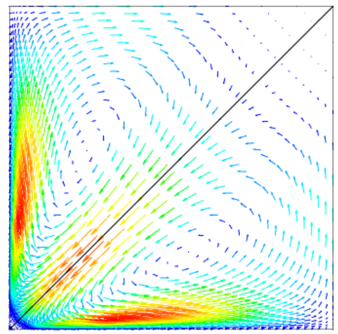
- Недостатки
  - В некоторых случаях гипотеза Буссинеска несправедлива и ее использование приводит к получению качественно неверного результата

В таких случаях необходимо использование моделей рейнольдсовых напряжений или нелинейных моделей

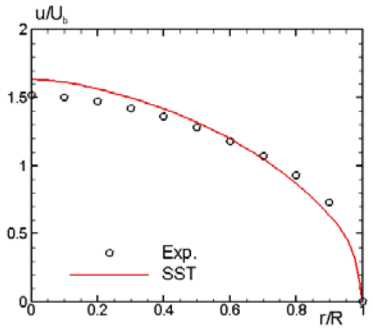
Примеры: внутренние течения

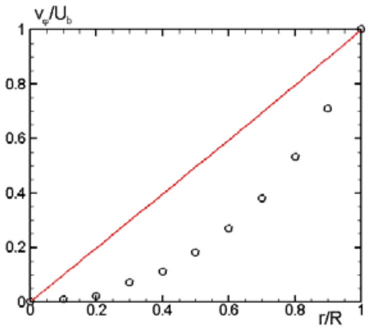
- Установившееся течение в трубе квадратного сечения
  - ➢ Линейные модели неспособны предсказать вторичные токи



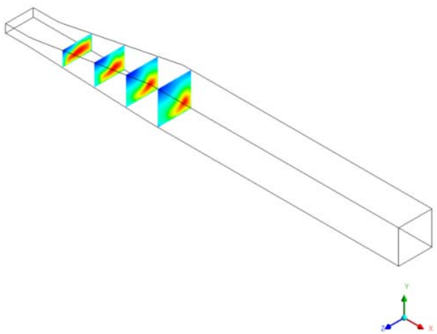


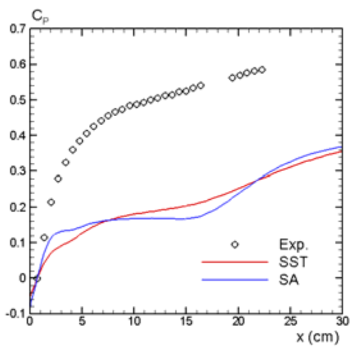
- Установившееся течение в вращающейся круглой трубе
  - ➢ Линейные модели предсказывают линейный профиль тангенциальной скорости

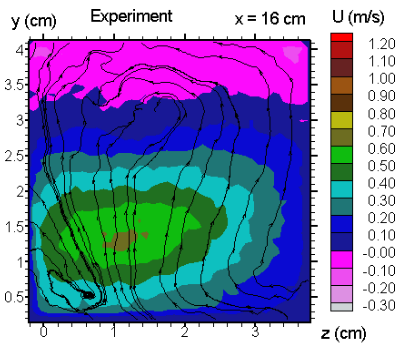


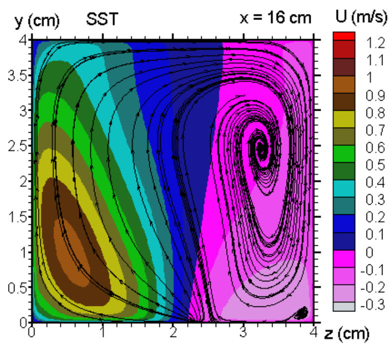


- Течение в диффузоре
  - ➢ Качественно неправильная картина течения





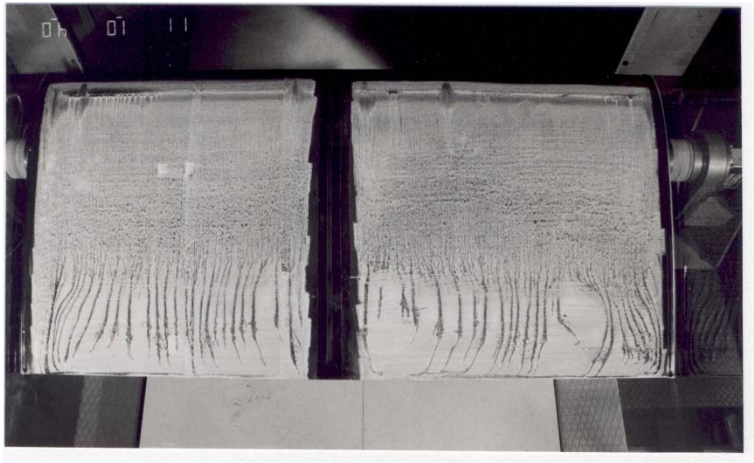


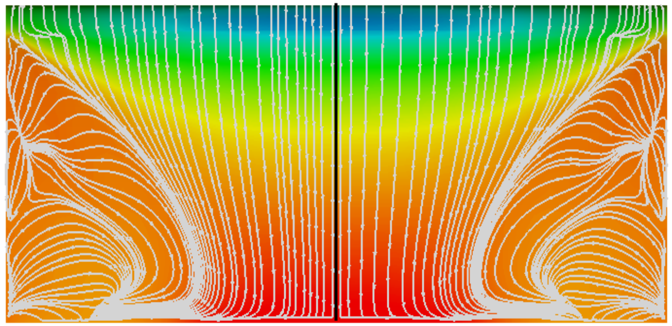


Изолинии продольной компоненты скорости в эксперименте и расчете

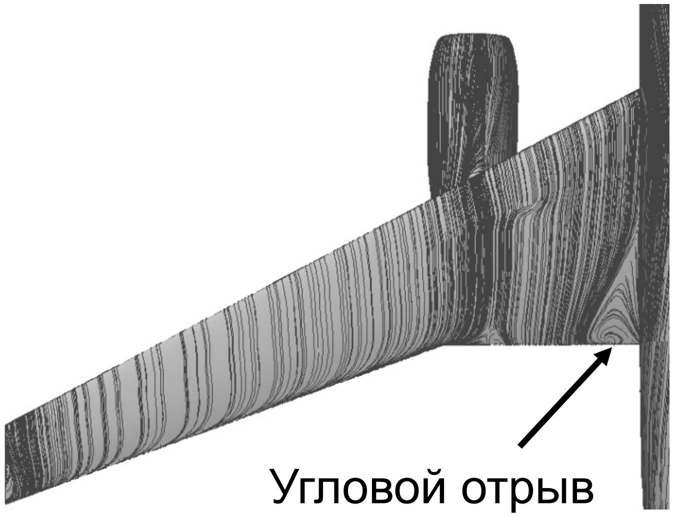
Примеры: угловой отрыв на крыле

- Линейные модели существенно завышают угловой отрыв
  - Обтекание крылового профиля в аэродинамической трубе





  - Сочленение крыла с фюзеляжем



Поверхностные линии тока в эксперименте и расчете

Классификация моделей рейнольдсовых напряжений

- Дифференциальные модели рейнольдсовых напряжений (DRSM)
  - ➢ Для каждой из 6 независимых компонент тензора рейнольдсовых напряжений решается дифференциальное уравнение
  - ➢ Для замыкания этой системы необходимо добавить еще одно уравнение
    - ✓ для ε или ω

- Алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (ARSM).
  - ➢ Алгебраические связи между рейнольдсовыми напряжениями и осредненными параметрами потока.
  - ➢ Необходимо получить масштабы турбулентности
    - ✓ База модели: два дифференциальных уравнения (k-ε или k-ω)

- Явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (EARSM).
  - ➢ Алгебраические связи разрешаются относительно рейнольдсовых напряжений.
    - ✓ Для связи между тензором рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций используются нелинейные соотношения.
    - ✓ Эти модели часто называют нелинейными моделями (NLM).

Дифференциальные модели рейнольдсовых напряжений

- Первая модель была предложена Ротта (1951)
  - Не инструмент расчета, а теоретическое исследование
- Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. (1975)
  - Первая по настоящему работоспособная модель
  - Были изложены основные идеи построения дифференциальных моделей рейнольдсовых напряжений
  - Была предложена наиболее часто используемая модель (LLR)
    - ✓ Основа для разработки алгебраических моделей (в том числе явных)
- Были разработаны десятки моделей
  - GL (Гибсон, Лаундер)
  - SSG (Спезиале, Саркар, Гатски)

Уравнения для рейнольдсовых напряжений
(вторых одноточечных моментов)

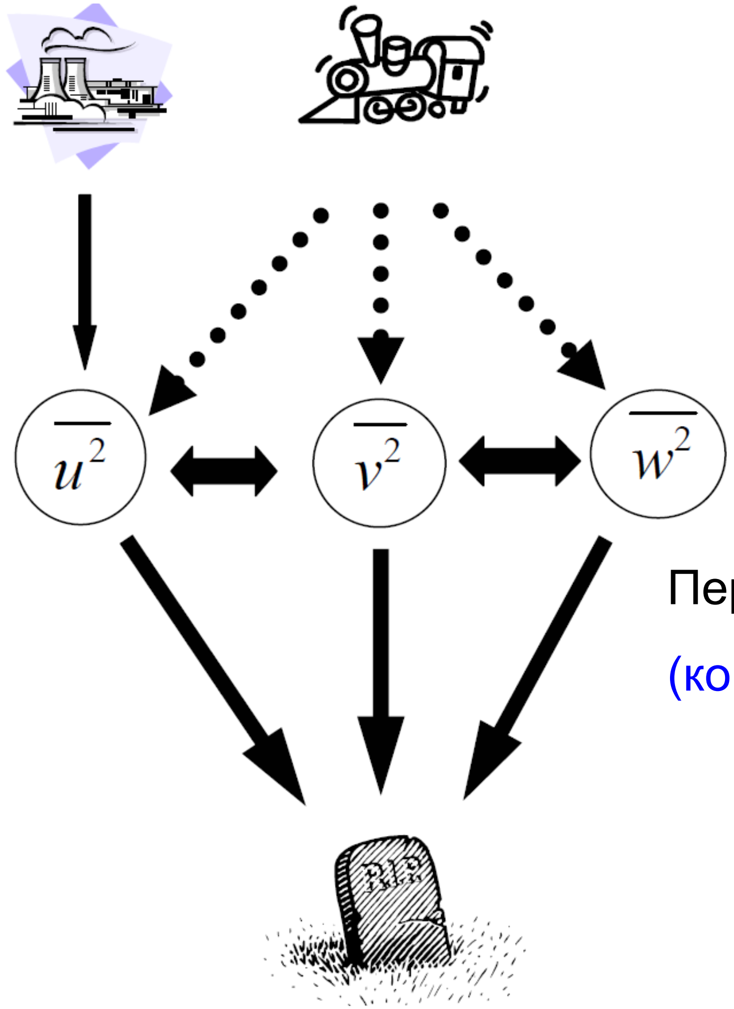
- Эти уравнения могут быть получены из уравнений Навье-Стокса с использованием процедуры осреднения по Рейнольдсу
- Будем рассматривать уравнения для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_i'u_j'} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i'u_j'} = \frac{\partial}{\partial x_k} D_{ijk} + P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}$$

- ➢ Диффузия $D_{ijk} = \nu \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i'u_j'} - \overline{u_i'u_j'u_k'} - \frac{1}{\rho}\left(\delta_{ik}\overline{u_j'p'} + \delta_{jk}\overline{u_i'p'}\right)$
  - ✓ Молекулярный и турбулентный диффузионный перенос
- ➢ Генерация $P_{ij} = -\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j'u_k'}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}$
  - ✓ Получение энергии от осредненного течения
- ➢ Корреляция давление-скорость деформации $\Phi_{ij} = \overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)}$
  - ✓ Перераспределение энергии между компонентами тензора
- ➢ Диссипация $\varepsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}$
  - ✓ Передача энергии в тепло за счет вязких сил
- ➢ Для замыкания системы уравнений необходимо промоделировать турбулентную диффузию, корреляцию давление – скорость деформации и диссипацию

Уравнения для рейнольдсовых напряжений

Генерация   Конвекция и диффузия основным потоком



Перераспределение пульсациями давления

(корреляция давление-скорость деформации)

Диссипация в тепло за счет вязкости

Некоторые следствия тензорного анализа (I)

- Рассмотрим два тензора второго ранга в трехмерном пространстве $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$
  - Пусть $\mathbf{B} = f(\mathbf{A})$
- Разложим функцию f в ряд Тейлора.

$$\mathbf{B} = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \ldots \qquad (1)$$

- Для тензоров выполняется теорема Гамильтона-Кэли
  - Тензор является корнем своего характеристического уравнения

$$\mathbf{A}^3 - b_2\mathbf{A}^2 + b_1\mathbf{A} - b_0\mathbf{I} = 0 \qquad (2)$$

    - ✓ Коэффициенты b_i являются инвариантами тензора $\mathbf{A}$
- Подставив (2) в (1) можно получить

$$\mathbf{B} = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}^2$$

  - Коэффициенты c_i зависят от инвариантов тензора $\mathbf{A}$
    - ✓ $\{\mathbf{A}\}, \{\mathbf{A}^2\}, \{\mathbf{A}^3\}$

Некоторые следствия тензорного анализа (II)

- Коэффициент c_0 можно исключить записав зависимость $\mathbf{B} = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}^2$ в бездивиргентной форме
$$\left(\mathbf{B} - \frac{1}{3}\{\mathbf{B}\}\mathbf{I}\right) = c_1\left(\mathbf{A} - \frac{1}{3}\{\mathbf{A}\}\mathbf{I}\right) + c_2\left(\mathbf{A}^2 - \frac{1}{3}\{\mathbf{A}^2\}\mathbf{I}\right)$$
    - ➢ Слагаемые в скобках в правой части называют тензорными группами
- Если оба тензора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют нулевой след, то
$$\mathbf{B} = c_1\mathbf{A} + c_2\left(\mathbf{A}^2 - \frac{1}{3}\{\mathbf{A}^2\}\mathbf{I}\right)$$
    - ➢ Модель для диссипации
    - ➢ Модель для быстрого слагаемого
- Подобные рассуждения можно провести для функции нескольких переменных и определить общий вид функциональной зависимости
    - ➢ В этом случае будет больше тензорных групп
        - ✓ Модель для медленного слагаемого
        - ✓ Явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений

Тензор анизотропии

- При создании моделей рейнольдсовых напряжений часто используется тензор анизотропии

$$a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3}\delta_{ij}$$

  - Этот тензор является
    - ✓ безразмерным
    - ✓ симметричным
    - ✓ девиаторным (след равен 0)
  - В некоторых работах используют величину $b_{ij} = \frac{1}{2}a_{ij}$

- Часто используются инварианты этого тензора (треугольник Ламли)
  - $A_2 = a_{ij}a_{ji} = \{\mathbf{A}^2\}$
  - $A_3 = a_{ij}a_{jk}a_{ki} = \{\mathbf{A}^3\}$

- Комбинация $A = 1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3)$ является структурной характеристикой турбулентности
  - A=1 соответствует изотропной турбулентности
  - A=0 соответствует двумерной турбулентности
    - ✓ Например: слой смешения

Турбулентная диффузия

$$D_{ijk}^{T} = -\overline{u_i' u_j' u_k'} - \frac{1}{\rho}\left(\delta_{ik}\overline{u_j' p'} + \delta_{jk}\overline{u_i' p'}\right)$$

- Основной вклад вносит тройная корреляция скорости
- Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. (1975)
  - ➢ В простых случаях между разными подходами почти нет разницы
  - ➢ Моделирование диффузии слабо влияет на результат
- Простейшие модели основаны на гипотезе градиентной диффузии
  - ➢ Изотропная диффузия $$D_{ijk} = \frac{2}{3} C_s \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k}, C_s = 0.22$$
  - ➢ Анизотропная диффузия $$D_{ijk} = C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k' u_l'} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_l}, C_s = 0.22$$
    - ✓ Нет симметричности относительно перестановки индексов i,j,k
- Модели с симметрией индексов
  - ➢ Изотропная диффузия $$D_{ijk}^{t} = C_s' \frac{k^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \overline{u_j' u_k'}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_k' u_i'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k}\right)$$
  - ➢ Анизотропная диффузия $$D_{ijk}^{t} = C_s \frac{k}{\varepsilon}\left(\overline{u_k' u_l'} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_l} + \overline{u_i' u_l'} \frac{\partial \overline{u_k' u_j'}}{\partial x_l} + \overline{u_j' u_l'} \frac{\partial \overline{u_i' u_k'}}{\partial x_l}\right)$$
- Последние исследования показали, что более сложные модели могут приводить к неустойчивости

Диссипация

- Наиболее простым является предположение о локальной изотропности диссипации

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon$$

  - Справедливо в высокорейнольдсовом приближении (вдали от стенок)
  - При его использовании предполагается моделирование неизотропной части вместе с корреляцией давление-скорость деформации

$$\Phi_{ij}^{\varepsilon} = \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + \tfrac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon$$

- Другим предельным случаем является предположение о пропорциональности диссипации соответствующему напряжению

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon}{k}\overline{u_i' u_j'}$$

  - Справедливо в окрестности стенок
  - Более точное выражение (Лаундер, Рейнольдс) получено при помощи асимптотического разложения скорости в ряд в окрестности стенки

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon}{k}\left[\overline{u_i' u_j'} + \alpha\left(\overline{u_i' u_k'} n_k n_j + \overline{u_j' u_k'} n_k n_i\right) + \beta \overline{u_k' u_l'} n_k n_l \delta_{ij}\right], \alpha = 1, \beta = 1$$

Диссипация

- Общую теория построения алгебраических моделей диссипации была разработана Hallback, Groth и Johansson на основе тензорного анализа

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon + \varepsilon\left[\left(1+\alpha\left(\frac{1}{2}A_2 - \frac{2}{3}\right)\right)a_{ij} - \alpha\left(a_{ik}a_{kj} - \frac{1}{3}A_2\delta_{ij}\right)\right]$$

  - Константа α=0.75 была подобрана на основе задачи об однородной изотропной турбулентности, подверженной внезапному сдвигу
- Наиболее сложные модели включают взвеси разных подходов
  - Например: Hanjalic,1996

$$\varepsilon_{ij} = (1-f_s)\frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon + f_s\varepsilon_{ij}^*, \quad \varepsilon_{ij}^* = \frac{\varepsilon}{k}\frac{\left[\overline{u_i'u_j'} + \left(\overline{u_i'u_k'}n_k n_j + \overline{u_j'u_k'}n_k n_i + \overline{u_k'u_l'}n_k n_l\delta_{ij}\right)f_d\right]}{1+\frac{3}{2}n_m n_n f_d\,\overline{u_m'u_n'}/k}$$

    - ✓ f_d и f_s – функции, зависящие от расстояния до стенки

$$f_d = (1+0.1\,\mathrm{Re}_t)^{-1};\ f_s = 1-\sqrt{A}E^2,$$

    - ✓ $\mathrm{Re}_t = k^2/(\nu\varepsilon)$ - турбулентное число Рейнольдса, n_i – орт соответствующей оси, а A и E – инварианты тензоров анизотропии a_{ij} и диссипации ε_{ij} соответственно

Корреляция давление – скорость деформации

- Наиболее сложна для моделирования.
  - Чрезвычайно сильно влияет на результат
- При использовании изотропной диссипации моделируется

$$\Phi_{ij}^{\varepsilon} = \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + \tfrac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon$$

- В основе всех моделей лежит работа Chou (1945)
  - Уравнение Пуассона для пульсаций давления
    - ✓ Дивергенция уравнения для пульсационной составляющей скорости
  - Корреляция давление-скорость деформации может быть выражена в следующем виде

$$\overline{\frac{p'}{\rho}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = \frac{1}{\pi}\int_{vol}\left\{\overline{\left(\frac{\partial^2 u_l' u_m'}{\partial x_l \partial x_m}\right)_Y \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)_X} + 2\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m}\right)_X \overline{\left(\frac{\partial u_m'}{\partial x_l}\right)_Y \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)_X}\right\}\frac{dvol}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} + S_{ij}$$

    - ✓ S_{ij}- интеграл по поверхности (пренебрежимо мал вдали от твердой границы)
- Корреляцию можно разделить на два слагаемых

$$\Phi_{ij} = \varepsilon \cdot \mathrm{A}_{ij}(\mathbf{a}) + k\mathrm{M}_{ijkl}(\mathbf{a})\frac{\partial U_k}{\partial x_l} = \Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,2}$$

  - Не зависит от производной средней скорости
    - ✓ «Медленное» слагаемое (slow, слагаемое Ротта)
  - Зависит от производной средней скорости
    - ✓ «Быстрое» слагаемое, (rapid)

Общий вид корреляции давление – скорость деформации из тензорного анализа

- «Медленное» слагаемое зависит только от тензора анизотропии
  - Модель для «медленного» слагаемого

$$\Phi_{ij,1} = -\varepsilon\left(C_1 a_{ij} + C_2\left(a_{ik}a_{kj} - \frac{1}{3}A_2\delta_{ij}\right)\right)$$

  - ✓ Линейная модель: $C_2=0$, $C_1=\mathrm{const}$
  - ✓ Квазилинейная модель: $C_2=0$, $C_1\neq\mathrm{const}$

- «Быстрое» слагаемое зависит от производной скорости и тензора анизотропии
  - Предположим линейную зависимость «быстрого» слагаемого от производной скорости
    - ✓ Получим следующую общую модель для быстрого слагаемого

$$\begin{aligned}\Phi_{ij,2} &= kS_{kl}\left[Q_1\cdot\delta_{ik}\delta_{jl} + Q_2\left(a_{ik}\delta_{jl} + a_{jk}\delta_{il} - \tfrac{2}{3}a_{kl}\delta_{ij}\right) + Q_3\cdot a_{kl}a_{ij}\right] + \\ &+ kS_{kl}[Q_4\left(a_{ik}a_{jl} - \tfrac{1}{3}a_{km}a_{ml}\delta_{ij}\right) + \left(Q_5\cdot a_{kl} + Q_6\cdot a_{km}a_{ml}\right)\left(a_{in}a_{nj} - \tfrac{1}{3}A_2\delta_{ij}\right)] + \\ &+ k\Omega_{kl}[Q_7\left(a_{ik}\delta_{jl} + a_{jk}\delta_{il}\right) + Q_8\cdot a_{km}\left(a_{jm}\delta_{il} + a_{im}\delta_{jl}\right) + Q_9\cdot a_{km}\left(a_{jm}a_{il} + a_{im}a_{jl}\right)]\end{aligned}$$

«Быстрое» слагаемое

- Различные модели в основном различаются моделированием этого слагаемого
  - При использовании изотропной диссипации считают, что строится модель для $\Phi_{ij,2}^{\varepsilon} = \Phi_{ij,2} - \varepsilon_{ij} + \frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon$
- Наиболее простой является упрощенная модель LRR

$$\Phi_{ij,2} = -\gamma\left(P_{ij} - \frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right), \gamma = 0.6 \qquad P_{ij} = -\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j'u_k'}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \qquad P_k = -\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

- На основе кинематических ограничений и предположения о линейности тензора $\Phi_{ij,2}$ относительно тензора анизотропии LRR была предложена модель

$$\Phi_{ij,2} = -\frac{c_2+8}{11}\left(P_{ij} - \frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right) - \frac{30c_2-2}{55}2kS_{ij} - \frac{8c_2-2}{11}\left(Q_{ij} - \frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right), c_2 = 0.4$$

$$Q_{ij} = -\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \overline{u_j'u_k'}\frac{\partial U_k}{\partial x_i}$$

  - Эта модель легла в основу нескольких алгебраических моделей

Учет влияния стенки

- Задача построения слагаемых, учитывающих влияние стенки, оказывается еще более сложной

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij,1} + \Phi_{ij,2} + \Phi^{w}_{ij,1} + \Phi^{w}_{ij,2}$$

- Необходимо построить «маркер», определяющий попадание точки внутрь пограничного слоя
  - Часто используют величину $f\left(l/x_n\right) = \dfrac{k^{1.5}}{2.5\varepsilon x_n}$
  - Легко показать, что в логарифмической области эта величина равна 1

$$k = \frac{u_\tau^2}{C_\mu^{0.5}} \qquad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa x_n} \qquad \Rightarrow \qquad f\left(l/x_n\right) = \frac{k^{1.5}}{2.5\varepsilon x_n} = \frac{1}{2.5x_n}\frac{u_\tau^3}{C_\mu^{3/4}}\frac{\kappa x_n}{u_\tau^3} = \frac{\kappa}{2.5C_\mu^{3/4}} \approx 1$$

- Например: типичные слагаемые для учета влияния стенки

$$\Phi^{w}_{ij,1} = C_1^w \frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u'_k u'_m} n_k n_m \delta_{ij} - 1.5\overline{u'_k u'_i} n_k n_j - 1.5\overline{u'_k u'_j} n_k n_i\right) f\left(l/x_n\right)$$

$$\Phi^{w}_{ij,2} = C_2^w \left(\Phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - 1.5\Phi_{ki,2} n_k n_j - 1.5\Phi_{kj,2} n_k n_i\right) f\left(l/x_n\right)$$

Уравнение для изотропной диссипации

- Для замыкания уравнений необходимо определить изотропную диссипацию ε
  - ➢ Необходимо дополнительное дифференциальное уравнение
    - ✓ Чаще всего традиционно используют уравнение для ε
    - ✓ Иногда используют уравнение для завихренности ω

- Модель рейнольдсовых напряжений «наследует» свойства базовой модели
  - ➢ Использование уравнения для ε приведет к существенным ошибкам в случае течений с положительным градиентом давления
    - ✓ Особенно существенно при расчета отрывных течений
    - ✓ В уравнение для ε вводятся специальные поправки

$$E = \max\left(\left[\left(\frac{\partial l}{\partial l_e}\right)^2 - 1\right]\left(\frac{\partial l}{\partial l_e}\right)^2 A\frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{k}, 0\right) \quad \text{или} \quad E = \max\left(\left[\frac{l}{l_e} - 1\right]\left(\frac{l}{l_e}\right)^2 A\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k}, 0\right)$$

— Основаны на сопоставлении двух линейных масштабов, которые должны быть равны на логарифмическом участке профиля скорости: $l = k^{3/2}/\varepsilon$ и $l_e = C_\mu^{-3/4}\kappa d_w$

— Предотвращают неавтомодельное поведение турбулентных характеристик (k и ε) на логарифмическом участке профиля скорости

Пример: модель LRR

Диффузия

$$D_{ijk}=C_s\frac{k}{\varepsilon}\left(\overline{u'_i u'_l}\frac{\partial\,\overline{u'_j u'_k}}{\partial\,x_l}+\overline{u'_j u'_l}\frac{\partial\,\overline{u'_k u'_i}}{\partial\,x_l}+\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial\,\overline{u'_i u'_j}}{\partial\,x_l}\right)$$

Корреляция давление-скорость деформации

$$\Phi_{ij,1}=-C_1\varepsilon a_{ij}$$

$$\Phi_{ij,2}=-\gamma\left(P_{ij}-\frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right),\gamma=0.6$$

или

$$\Phi_{ij,2}=-\frac{c_2+8}{11}\left(P_{ij}-\frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right)-\frac{30c_2-2}{55}2kS_{ij}-\frac{8c_2-2}{11}\left(Q_{ij}-\frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right),c_2=0.4$$

$$Q_{ij}=-\overline{u'_i u'_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}-\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_i}$$

Диссипация

$$\varepsilon_{ij}=\frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon$$

Уравнение для изотропной диссипации

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+U_k\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_k}+C_\varepsilon\frac{k}{\varepsilon}\overline{u'_k u'_l}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}\right)+C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}P_k-C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}$$

Константы

$$C_s=0.11;\ C_1=1.5;\ C_2=0.4;\ \gamma=0.6;\ C_\varepsilon=0.15;\ C_{\varepsilon 1}=1.44;\ C_{\varepsilon 2}=1.9$$

Пример: высорорейнольдсовая модель SSG

- Может использоваться только совместно с пристенными функциями

Диффузия

$$D_{ijk} = \frac{2}{3} C_s \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \rho \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}$$

Корреляция давление-скорость деформации

$$\Phi_{ij,1} = -\varepsilon \left[\left(C_{s1} + C_{r1} \frac{P}{\varepsilon} \right) a_{ij} + C_{s2} \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \right]$$

$$\Phi_{ij,2} = k \left[\left(C_{r2} - C_{r3} A_2 \right) S_{ij} + C_{r4} \left(a_{ik} S_{kj} + S_{ik} a_{kj} - \tfrac{2}{3} a_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right) + C_{r5} \left(a_{ik} \Omega_{kj} + \Omega_{ik} a_{kj} \right) \right]$$

Диссипация

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon$$

Уравнение для изотропной диссипации

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (U_j \varepsilon)}{\partial x_j} = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \qquad \nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon$$

Константы модели:

$$C_{s1} = 1.7,\ C_{s2} = -1.05,\ C_{r1} = 0.9,\ C_{r2} = 0.8,\ C_{r3} = 0.65,\ C_{r4} = 0.625,\ C_{r5} = 0.2,$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1.44,\ C_{\varepsilon 2} = 1.83,\ \sigma_\varepsilon = 1.3.$$

Пример: низкорейнольдсовая модель SSG

Корреляция давление-скорость деформации

$$\Phi_{ij,1} = -\varepsilon\left[C_1\left\{1-(1-\frac{1}{C_1})f_w\right\}a_{ij} + C_1^{'}(1-f_w)\left(a_{ik}a_{kj} - \frac{1}{3}A_2\delta_{ij}\right)\right]$$

$$\Phi_{ij,2} = \varepsilon\left[C_{01}S_{ij} + C_{11}\left(a_{ik}S_{kj} + S_{ik}a_{kj} - \frac{2}{3}a_{nm}S_{nm}\delta_{ij}\right) + C_{12}\left(a_{ik}\Omega_{kj} + \Omega_{ik}a_{kj}\right)\right]$$

$$\Phi_{ij}^{w} = f_w\left[0.45\left(P_{ij} - \frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right) - 0.03\left(D_{ij} - \frac{2}{3}P_k\delta_{ij}\right) + 0.16kS_{ij}\right] \qquad f_w = \exp\left[-\left(0.0184\sqrt{k}d_w/\nu\right)^4\right]$$

Уравнение для изотропной диссипации

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(U_k\varepsilon)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left((\nu\delta_{kl} + C_\varepsilon\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k u_l})\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}\right) + [C_{\varepsilon 1}(1 + C_{\varepsilon 4}f_w)P_k - C_{\varepsilon 2}f_\varepsilon\varepsilon^*]\frac{\varepsilon}{k} + \xi$$

$$f_\varepsilon = 1 - \tfrac{2}{9}\exp[-(R_t/6)^2] \qquad \xi = [\left(-2 + \tfrac{7}{9}C_{\varepsilon 2}\right)\varepsilon - 0.5\varepsilon^*]\cdot\varepsilon^*/k\cdot f_w \qquad \varepsilon^* = \varepsilon - 2\nu k/d_w^2$$

Константы модели:

$$C_1 = 1.7 + 0.9P_k/\varepsilon \quad C_1^{'} = -1.05 \quad C_{01} = 0.8 - 0.65\sqrt{A_2}$$

$$C_{11} = 0.625,\ C_{12} = 0.2,\ C_\varepsilon = 0.15,\ C_{\varepsilon 1} = 1.35,\ C_{\varepsilon 2} = 1.8,\ C_{\varepsilon 4} = 1.0$$

- Низкорейнольдсовая версия модели гораздо сложнее высокорейнольдсовой
  - Больше проблем со сходимостью

Гибридная модель LRR/SSG

- Модель разрабатывалась в рамках проекта Flomania группой из DLR (Eisfeld)
- При ее разработке были использованы лучшие идеи
  - ➢ Использование замыкающего соотношения для изотропной диссипации ω
    - ✓ Включая cross-diffusion term
  - ➢ «Сшивка» разных моделей
    - ✓ Модель LRR была откалибрована для расчета свободных течений
    - ✓ Модель SSG создавалась для пристенных течений
    - ✓ Сшивающая функция заимствована из модели Ментера SST
- Модель была тщательно тестирована на широком круге течений
  - ➢ http://turbmodels.larc.nasa.gov
- Видимо, в настоящий момент это лучшая дифференциальная модель рейнольдсовых напряжений

Недостатки моделей Рейнольдсовых напряжений

- Много дифференциальных уравнений
  - ➢ Не менее 7 уравнений для турбулентности
    - ✓ Требуется много вычислительных ресурсов.
  - ➢ В задачах теплопередачи еще 3 дополнительных уравнения для корреляций скорости и температуры
- Существенная нелинейность системы уравнений
  - ➢ Необходимо использовать специальные средства для улучшения устойчивости и сходимости
    - ✓ Векторные прогонки
    - ✓ Демпфирование
- Постановка граничных условий на свободных границах для напряжений
  - ➢ Нет физических оснований
- Модели рейнольдсовых напряжений калибровались и тестировались на простейших течениях несжимаемой жидкости
  - ➢ Для учета специальных эффектов (кривизна линий тока, сжимаемость и т.п.) необходимо введение специальных поправок
    - ✓ Их разработка для столь сложных моделей является крайне трудоемкой работой

Принцип реализуемости

- Полученное решение может быть неприемлемым с физической точки зрения
  - ➢ Нормальные напряжения должны быть неотрицательны в любой системе координат
  - ➢ Принцип реализуемости Ламли
    - ✓ Тензор рейнольдсовых напряжений должен удовлетворять соотношениям

$$\begin{cases} \overline{u_i'^2} \geq 0 \\ \overline{u_i'^2} \cdot \overline{u_j'^2} \geq \left(\overline{u_i' u_j'}\right)^2 \\ \det\left\{\overline{u_i' u_j'}\right\} \geq 0 \end{cases}$$

- В дифференциальных моделях рейнольдсовых напряжений невозможно априори гарантировать выполнение этого принципа
  - ➢ Необходимо проверять его в каждом конкретном случае
    - ✓ Отбраковка «дефектных» расчетов
      - – Неприемлемо для «инженерного» использования
    - ✓ Введение коррекций «поверх» решения уравнений

Резюме

- В некоторых течениях невозможно получить правильное решение из-за недостатков гипотезы Буссинеска
- Привлекательным решением является построение модели на основе уравнений для напряжений Рейнольдса
- Для замыкания этих уравнений приходится привлекать множество дополнительных предположений
- Численное решение полученной системы – очень трудная задача
- Полученное решение может быть неприемлемым с физической точки зрения
- Дифференциальные модели турбулентности используются крайне редко