

УДК 532.517.4

## ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТЕЙ ЯВНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РЕЙНОЛЬДСОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РАСЧЕТУ ПРИСТЕННЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

© 1999 г. А. В. Гарбарук, Ю. В. Лапин, М. Х. Стрелец

Санкт-Петербургский государственный технический университет

Поступила в редакцию 02.09.98 г.

С помощью явной алгебраической модели рейнольдсовых напряжений (EARSМ) проведены расчеты канонических турбулентных пограничных слоев на плоской пластине при нулевом, отрицательном и положительном градиентах давления. На основе сопоставления результатов с расчетными данными, полученными с использованием стандартных  $K-\omega$ - и  $K-\epsilon$ -моделей турбулентности, и с известными экспериментальными данными показано, что несмотря на очевидные преимущества EARSМ перед традиционными моделями при расчете течений с существенной анизотропией рейнольдсовых напряжений применительно к рассматриваемому классу течений эти преимущества проявляются главным образом при определении пульсационных параметров потока. Кроме того, во всех случаях точность EARSМ существенно зависит от выбора базовой модели, и в этом смысле  $K-\omega$ -модель значительно превосходит  $K-\epsilon$ -модель. Результаты расчетов обтекания плоской пластины показали, что требуется более тщательная калибровка EARSМ совместно с базовой моделью.

**Введение.** С момента появления (начало 70-х годов) дифференциальные модели переноса рейнольдсовых напряжений (DRSM) рассматриваются как перспективная альтернатива традиционным моделям турбулентности, основанным на концепции скалярной турбулентной вязкости (градиентная гипотеза Буссинеска). Тем не менее до настоящего времени убедительные доказательства реального превосходства DRSM над традиционными моделями, по существу, отсутствуют. По крайней мере частично это определяется тем, что их применение для расчета достаточно сложных течений, для исследования которых в первую очередь предназначены DRSM, связано с серьезными вычислительными трудностями. Именно поэтому почти одновременно с DRSM началась разработка соответствующих алгебраических моделей (ARSM), первая из которых была предложена Родди [1]. Опыт практического применения ARSM показал, однако, что они также не свободны от серьезных недостатков, детально проанализированных в недавно опубликованной работе [2]. В частности, вследствие существенной нелинейности модельных алгебраических уравнений не гарантируется единственность решения. Кроме того, ARSM не всегда удовлетворяют сформулированному Ламли [3] “принципу реализуемости”

$$\overline{u_i^2} \geq 0, \quad \overline{u_i^2 u_j^2} \geq (\overline{u_i u_j})^2, \quad \det\{\langle \overline{u_i u_j} \rangle\} \geq 0,$$

( $\overline{u_i u_j}$  – компоненты тензора рейнольдсовых напряжений) и при некоторых условиях оказыва-

ются сингулярными, что приводит к очевидным вычислительным проблемам.

Отмеченные недостатки ARSM стимулировали попытки создания так называемых явных алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений (EARSМ), в которых исходные модельные уравнения тем или иным способом явно разрешены относительно рейнольдсовых напряжений, что позволяет получить единственность решения и упростить проверку выполнения принципа реализуемости. За последние годы предложено несколько моделей такого типа (см. например, [4–7]), которые применялись для расчета достаточно сложных турбулентных течений. Например, как показано в работе [4], предложенная ее авторами EARSМ обеспечивает вполне приемлемую точность расчета установившегося турбулентного течения в круглой трубе, вращающейся относительно своей оси. Для этого течения характерно наличие существенной анизотропии рейнольдсовых напряжений, приводящей к заметной нелинейности профиля тангенциальной составляющей скорости (этот эффект принципиально не может быть описан в рамках моделей турбулентности, использующих концепцию скалярной турбулентной вязкости). Таким образом, с этой точки зрения EARSМ имеют очевидные преимущества перед традиционными “изотропными” моделями, а с точки зрения вычислительной эффективности – значительно превосходят классические ARSM, что позволяет рассматривать разработку моделей данной группы и исследование их возможностей как одно из наиболее важных

направлений полуэмпирической теории турбулентности [2]. В этой связи определенный интерес представляет вопрос о точности EARSM при расчете канонических пристенных течений, в которых анизотропия рейнольдсовых напряжений не столь существенна, но могут проявляться другие сложные для моделирования эффекты. Ответ на этот вопрос применительно к турбулентным пограничным слоям на плоских поверхностях составляет цель данной работы.

**Модель турбулентности.** Расчеты были выполнены с использованием EARSM, предложенной в [4]. В общем случае произвольного плоского течения эта модель сводится к следующему соотношению для компонент тензора анизотропии рейнольдсовых напряжений:

$$a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{K} - \frac{2}{3} = f_1 \beta_1 S_{ij} + (1 - f_1^2) \frac{3B_2 - 4}{\max(\Pi_S, \Pi_S^{eq})} \left( S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} \Pi_S \right) + (f_1^2 \beta_4 - (1 - f_1^2) \frac{B_2}{2 \max(\Pi_S, \Pi_S^{eq})}) (S_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} S_{kj}). \quad (1)$$

Здесь  $S_{ij} = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$  и  $\Omega_{ij} = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$  – компоненты безразмерных тензоров скоростей деформации и завихренности;  $\Pi_S = S_{ij} S_{ji}$ ;  $\Pi_\Omega = \Omega_{ij} \Omega_{ji}$  – вторые инварианты соответствующих тензоров;  $\tau$  – временной масштаб турбулентности;  $K$  – кинетическая энергия турбулентности.

Входящие в (1) параметры  $\beta_1$  и  $\beta_4$  определяются соотношениями

$$\beta_1 = \frac{6}{5} \frac{N}{N^2 - 2\Pi_\Omega}, \quad \beta_4 = \frac{6}{5} \frac{1}{N^2 - 2\Pi_\Omega},$$

где  $N$  представляет собой решение следующего кубического уравнения:

$$N^3 - C_1' N^2 - (2.7\Pi_S + 2\Pi_\Omega)N + 2C_1' \Pi_\Omega = 0.$$

Это решение можно представить в виде

$$N = \frac{C_1'}{3} + (P_1 + \sqrt{P_2})^{1/3} + \text{sign}(P_1 - \sqrt{P_2}) |P_1 - \sqrt{P_2}|^{1/3} \quad \text{при } P_2 \geq 0, \\ N = \frac{C_1'}{3} + 2(P_1^2 - P_2)^{1/6} \times \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 - P_2}}\right)\right) \quad \text{при } P_2 < 0,$$

$$P_1 = \left( \frac{C_1'}{27} + \frac{9}{20} \Pi_S - \frac{2}{3} \Pi_\Omega \right) C_1',$$

$$P_2 = P_1^2 - \left( \frac{C_1'}{9} + \frac{9}{10} \Pi_S + \frac{2}{3} \Pi_\Omega \right).$$

Эмпирическая демпфирующая функция  $f_1$ , введенная в модель для учета влияния пристенных эффектов, определяется как  $f_1 = 1 - \exp(-y^+/A^+)$ . Эмпирические постоянные модели, полученные в работах [4, 5] на основе сопоставления результатов расчетов с экспериментальными данными и данными прямого численного моделирования [8] по установившемуся течению в плоском канале, равны

$$C_1' = 2.25(C_1 - 1), \quad C_1 = 1.8, \quad B_2 = 1.8, \quad A^+ = 26,$$

$$\Pi_S^{eq} = \frac{405 C_1^2}{216 C_1 - 160}.$$

Для случая турбулентного пограничного слоя на плоской поверхности уравнение движения содержит только одну составляющую тензора рейнольдсовых напряжений  $\overline{u'v'}$ . Можно показать, что в приближении пограничного слоя из общего выражения (1) для этой компоненты может быть получено следующее соотношение:

$$\overline{u'v'} = \frac{f_1 \beta_1 K \tau \partial U}{2 \partial y}, \quad (2)$$

которое позволяет ввести турбулентную вязкость, определяемую по формуле

$$\nu_t = \frac{f_1 \beta_1 K \tau}{2}. \quad (3)$$

Для замыкания модели (1), как и любой другой ARSM, необходимо добавить соотношения для определения кинетической энергии  $K$  и временного масштаба турбулентности  $\tau$ . Эти соотношения являются основой (базой) соответствующей ARSM и существенной частью полной модели.

В данной работе используются специально предложенные в [4] модификации  $K$ - $\epsilon$ -модели Чена [9] и  $K$ - $\omega$ -модели Уилкокса [10]. Отличие используемой формы модели Чена от ее оригинальной версии состоит в том, что связь между истинной и модифицированной скоростями диссипации турбулентности определяется соотношением  $\epsilon = \tilde{\epsilon} + 2\nu K/y^2 \exp(-C_k y^+)$  с константой  $C_k = 0.04$ , а не соотношением  $\epsilon = \tilde{\epsilon} + 2\nu K/y^2$ . В  $K$ - $\omega$ -модели Уилкокса используется следующее значение одной из ее эмпирических констант:  $R_\beta = 10$  (вместо восьми в оригинальной модели). При этом в обоих случаях предполагается, что турбулентная вязкость, входящая в уравнения переноса  $K$ ,  $\epsilon$  и  $\omega$  соответствующих моделей, определяется по формуле (3).

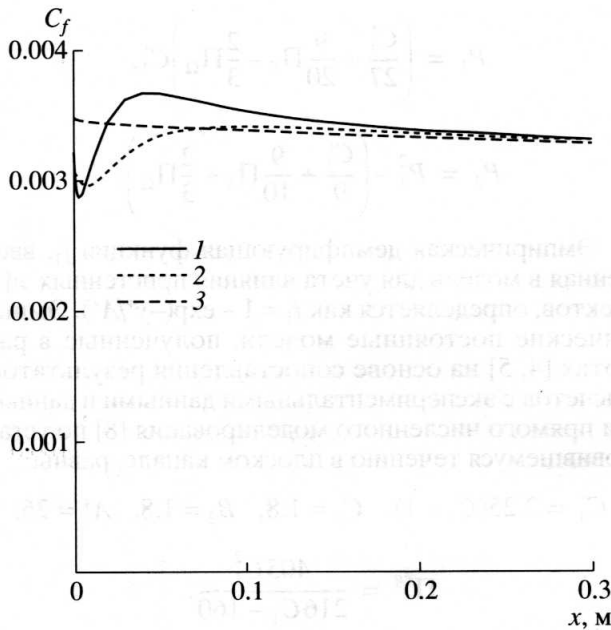


Рис. 1. Влияние начальных условий на расчетное распределение коэффициента трения в опыте 4800 при использовании модели EARSМ-CH: 1 – входные профили рассчитаны с использованием модели CH, 2 – модели EARSМ-WL, 3 – модели EARSМ-CH.

После того, как  $K$  и  $\epsilon$  или  $K$  и  $\omega$  найдены, временной масштаб турбулентности определяется либо как  $\tau = \max(K/\epsilon, 6\sqrt{\nu/\epsilon})$  [11], либо как  $\tau = \max((\beta^*\omega)^{-1}, 6\sqrt{\nu/(\beta^*\omega K)})$ , где  $\beta^*$  – эмпирическая функция модели Уилкокса [10], учитывающая влияние пристенных эффектов.

Для численного интегрирования системы уравнений пограничного слоя совместно с моделями турбулентности использовалась двуслойная неявная разностная схема типа Кранка–Николсона, имеющая первый порядок аппроксимации по продольной и второй – по поперечной координате. При этом расчет пограничного слоя на плоской пластине осуществлялся с помощью традиционного прямого метода решения уравнений пограничного слоя, в котором в качестве граничного условия на внешней границе задавалось продольное распределение скорости. При расчете пограничных слоев с градиентом давления использовался обратный метод [12, 13], в котором скорость вдоль внешней границы определялась по заданному распределению толщины вытеснения пограничного слоя.

В качестве граничных условий для скорости на стенке использовались условия прилипания и непроницаемости. Величины  $K$  и  $\epsilon$  на стенке полагались равными нулю, а удельная скорость диссипации  $\omega$  в соответствии с [14] определялась по формуле:  $\omega = 60\nu/(\beta\Delta y^2)$ , где  $\beta = 0.075$ , а  $\Delta y$  – пристенный шаг сетки.

При использовании в качестве базовой  $K$ – $\epsilon$  модели на внешней границе задавались значения  $K$  и  $\epsilon$ .  $K$  полагалось равным  $10^{-3}U_e^2$ , что соответствовало низкой степени турбулентности набегающего потока в экспериментах, для которых проводились расчеты, а  $\epsilon$  определялось по заданной турбулентной вязкости ( $\nu_t = 10^{-3}\nu$ ) с помощью формулы  $\epsilon = 0.09K^2/\nu_t$ . При использовании в качестве базовой  $K$ – $\omega$  модели величина  $K$  задавалась аналогично, а  $\omega$  рассчитывалась по формуле  $\omega = 4\tau_w/\rho/(\beta^{*1/2}U_e\delta^*)$  [14], где  $\tau_w$  – трение на стенке,  $\rho$  – плотность,  $U_e$  – скорость на внешней границе пограничного слоя, а  $\delta^*$  – толщина вытеснения.

В начальном сечении пограничного слоя задавались профили продольной составляющей скорости и соответствующих турбулентных характеристик ( $K$  и  $\epsilon$  или  $K$  и  $\omega$ ).

Расчеты проводились на неравномерной (со сгущением у стенки) сетке по  $y$ . Отношение соседних шагов не превышало 1.05, а пристенный шаг выбирался таким образом, чтобы в первом от стенки узле выполнялось условие  $y^+ < 0.1$ .

**Обсуждение результатов.** В качестве тестов с целью оценки возможностей рассматриваемой EARSМ для расчета плоских турбулентных пограничных слоев использовались известные эксперименты, имеющиеся в базе данных Стэнфордского университета. В частности, были рассмотрены пограничный слой на плоской пластине (опыт 1400 [15]), а также пограничные слои с отрицательным (опыт 2700 [15]) и положительным (опыты 0141 [16] и 4800 [15]) градиентами давления. Результаты, полученные с помощью EARSМ при использовании описанных выше модификаций  $K$ – $\epsilon$  модели Чена и  $K$ – $\omega$  модели Уилкокса (EARSМ-CH и EARSМ-WL соответственно), сравнивались с результатами расчетов в рамках оригинальных моделей Чена [9] (CH) и Уилкокса [10] (WL).

К сожалению, в указанных экспериментах отсутствуют опытные данные по турбулентным характеристикам потока в начальном сечении рассматриваемых пограничных слоев, необходимые для задания начальных условий к соответствующим уравнениям переноса. С целью определения этих характеристик перед расчетом каждого из рассматриваемых течений с использованием каждой модели проводился расчет пограничного слоя на пластине вплоть до сечения, в котором расчетное значение толщины вытеснения совпадало с соответствующим значением в первом экспериментальном сечении (при  $x = x_0$ ). Полученные при этом профили скорости и турбулентные характеристики потока использовались в качестве начальных (при  $x = x_0$ ) условий при проведении основного расчета. Очевидно, что такой подход является приближенным, однако, как показали

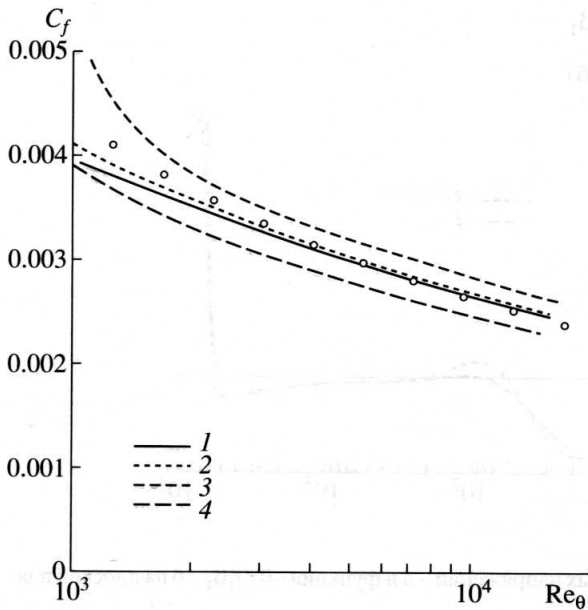


Рис. 2. Сопоставление результатов расчетов коэффициента трения на плоской пластине с корреляционной формулой Брэдшоу: 1 – модель CH, 2 – модель WL, 3 – модель EARSМ-CH, 4 – модель EARSМ-WL, точки – формула Брэдшоу.

специальные численные эксперименты, в том случае, когда входные профили скорости и турбулентных характеристик согласованы между собой (т.е. рассчитаны с использованием одной и той же модели турбулентности) неопределенность в их задании влияет на результаты расчетов лишь на сравнительно небольшом участке, составляющем незначительную часть рассматриваемого течения. Это подтверждает рис. 1, на котором в качестве примера приведены продольные распределения коэффициента трения для опыта 4800, рассчитанные по модели EARSМ-CH с ис-

пользованием входных профилей, полученных описанным выше способом с помощью моделей EARSМ-CH, CH и EARSМ-WL. Видно, что все кривые практически совпадают между собой уже при  $x = 0.2$  м, в то время как общая протяженность пограничного слоя в эксперименте составляет более 5 м.

Результаты основной серии расчетов представлены на рис. 2–10.

Анализируя эти результаты, следует прежде всего обратить внимание на то, что для случая пограничного слоя на плоской пластине (опыт 1400, рис. 2–4) EARSМ независимо от используемой базы уступает оригинальным моделям CH и WL по точности расчета осредненных параметров потока, в частности коэффициента трения и профиля скорости (рис. 2 и рис. 3а). Данный результат представляется вполне естественным, поскольку определение эмпирических констант и функций в моделях CH и WL осуществлялось, в первую очередь, на основе сопоставления с экспериментальными данными по осредненным характеристикам пограничного слоя на пластине, а в EARSМ – на основе сопоставления результатов расчетов с данными прямого численного моделирования течения в плоском канале [4, 5].

При расчете пульсационных характеристик турбулентности все рассматриваемые модели предсказывают близкие профили касательных реинольдсовых напряжений, вполне удовлетворительно совпадающие с экспериментальными данными [17] (рис. 3в). Профили кинетической энергии турбулентности, рассчитанные с помощью моделей WL и CH, заметно отличаются друг от друга (модель WL имеет при этом заметное преимущество), в то время как обе EARSМ предсказывают близкие результаты, удовлетворительно согласующиеся с экспериментом (см. рис. 3б).

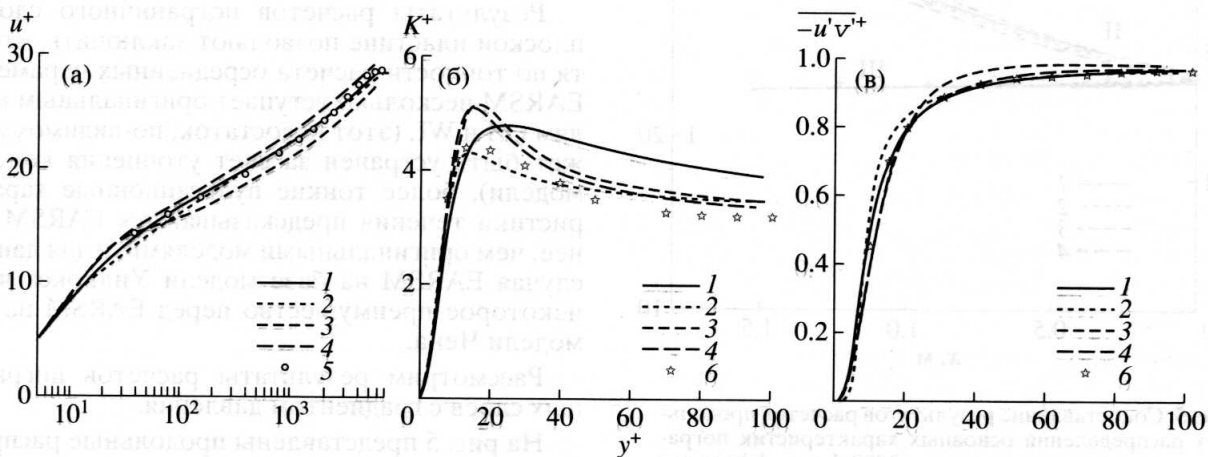


Рис. 3. Сопоставление результатов расчетов профиля скорости – а, кинетической энергии турбулентности – б и касательного реинольдсова напряжения – в с экспериментальными данными по пограничному слою на плоской пластине при  $x = 4.987$  м: 1–4 – то же, что и на рис. 2, 5 – экспериментальные данные [15], 6 – экспериментальные данные [17].

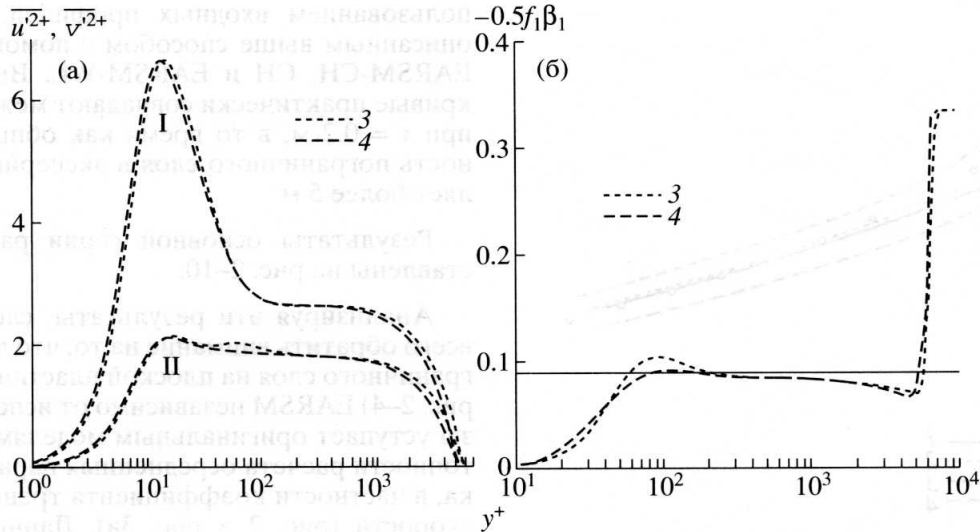


Рис. 4. Профили нормальных составляющих тензора реинольдсовых напряжений – а и функции  $-0.5f_1\beta_1$  – б на плоской пластине при  $x = 4.987$  м, рассчитанные с помощью моделей EARSM-CH – 3, и EARSM-WL – 4. На рис. 4а: I –  $u'^2$ , II –  $v'^2$ .

Определенный интерес представляют также приведенные на рис. 4а профили нормальных составляющих тензора реинольдсовых напряжений, рассчитанные с помощью EARSM моделей (соотношение (1)). Видно, что независимо от используемой базы EARSM дают близкие и, по крайней мере, качественно верные результаты:

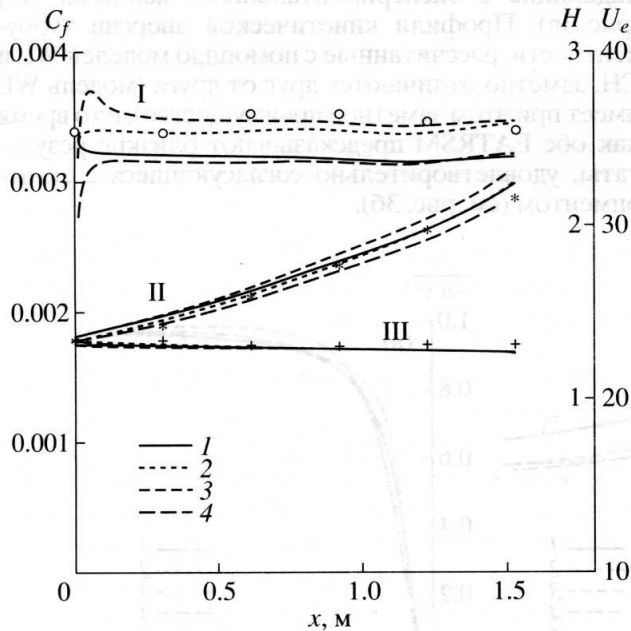


Рис. 5. Сопоставление результатов расчетов продольных распределений основных характеристик пограничного слоя с данными опыта 2700: I – коэффициент трения  $C_f$ , II – формпараметр  $H$ , III – скорости на внешней границе пограничного слоя  $U_e$ . 1–4 – то же, что и на рис. 2, точки – эксперимент.

во внутренней области пограничного слоя составляющая  $v'^2$  оказывается значительно меньшей, чем  $u'^2$ . Очевидно, что этот эффект в принципе не может быть описан с помощью моделей CH и WL, использующих гипотезу Буссинеска, согласно которой эти составляющие равны между собой. На рис. 4б приведены профили функции  $F = -0.5f_1\beta_1$ , которая, согласно (3), является аналогом функции  $C_\mu f_\mu$  ( $C_\mu = 0.09$  – константа Колмогорова), входящей в большинство полуэмпирических моделей турбулентности. Из рисунка видно, что независимо от используемой базы EARSM качественно правильно описывают характер изменения функции  $F$  (в области действия закона стенки она оказывается практически постоянной и близкой к константе Колмогорова 0.09).

Результаты расчетов пограничного слоя на плоской пластине позволяют заключить, что хотя по точности расчета осредненных параметров EARSM несколько уступает оригинальным моделям CH и WL (этот недостаток, по-видимому, может быть устранен за счет уточнения констант модели), более тонкие пульсационные характеристики течения предсказываются EARSM точнее, чем оригинальными моделями, и для данного случая EARSM на базе модели Уилкокса имеет некоторое преимущество перед EARSM на базе модели Чена.

Рассмотрим результаты расчетов пограничных слоев с градиентом давления.

На рис. 5 представлены продольные распределения основных характеристик пограничного слоя для опыта 2700 ( $dp/dx < 0$ ). Из рисунка видно, что в целом данное течение описывается всеми

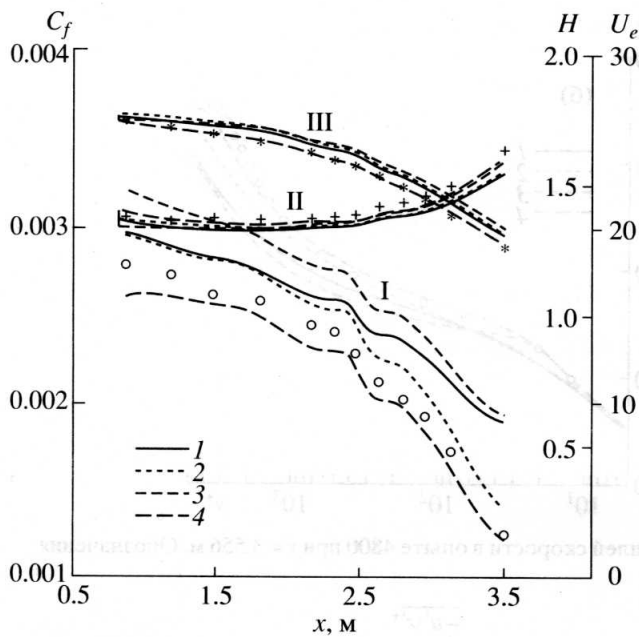


Рис. 6. Сопоставление результатов расчетов продольных распределений основных характеристик пограничного слоя с данными опыта 0141. Обозначения те же, что и на рис. 5.

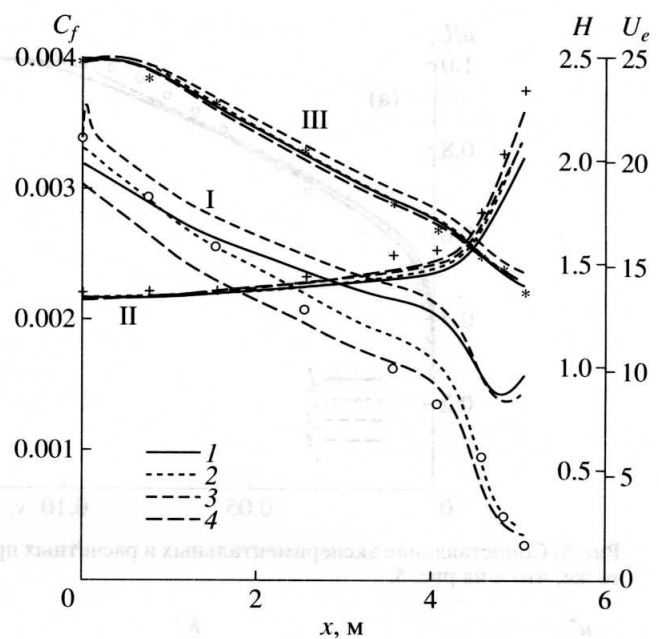


Рис. 7. Сопоставление результатов расчетов продольных распределений основных характеристик пограничного слоя с данными опыта 4800. Обозначения те же, что и на рис. 5.

рассматриваемыми моделями с вполне приемлемой точностью. Данный результат является вполне предсказуемым, так как известно, что расчет течений с умеренными (не приводящими к реламинаризации потока) отрицательными градиентами давления так же, как расчет пограничного слоя с нулевым градиентом давления, не представляет особых трудностей при использовании практически всех известных моделей турбулентности.

В связи с этим более важными представляются результаты расчетов пограничных слоев с положительным градиентом давления, представленные на рис. 6–10.

Анализ этих результатов позволяет сделать следующие выводы.

Во-первых, в данном случае свойства модели, используемой в качестве базы, в значительной степени “наследуются” соответствующей EARSM и, по существу, определяют точность полученных результатов. Так, например, в обоих рассмотренных случаях (опыты 0141 и 4800) EARSM-WL значительно превосходит по точности расчета осредненных параметров течения EARSM-CH. Это, очевидно, связано с известными недостатками модели Чена и других моделей типа  $K-\epsilon$  при расчете течений с положительным градиентом давления, особенно при приближении к точке отрыва (этот дефект оригинальной модели Чена отчетливо виден на рис. 6, 7).

Во-вторых, в отличие от рассмотренных ранее пограничных слоев с нулевым и отрицательным градиентом давления, в случае положительного градиента давления EARSM на базе модели Уилкокка имеет явное преимущество перед оригинальной моделью Уилкокка. Это заметно проявляется при сопоставлении расчетных и экспериментальных профилей скорости (рис. 8а, 9а) и пульсационных параметров течения, в частности профилей касательных реинольдсовых напряжений (рис. 9в). Так, следует обратить внимание на то, что в экспериментах, несмотря на наличие значительного градиента давления, сохраняется участок с логарифмическим профилем скорости. EARSM-WL описывает этот эффект вполне удовлетворительно, тогда как все остальные модели предсказывают практически полное вырождение логарифмической области (рис. 8б и 9а). Отметим также, что, согласно EARSM-WL, в логарифмической области происходит не столь значительное, как при использовании EARSM-CH, отклонение функции  $F$  от постоянного значения 0.09, используемого в обеих базовых моделях (рис. 10б).

Точность расчета кинетической энергии турбулентности и ее составляющих  $\overline{u'^2}$  и  $\overline{v'^2}$  (см. рис. 9б, 10а) оказывается далеко недостаточной даже при использовании лучшей из рассматриваемых моделей – EARSM-WL. Хотя это и не влияет на осредненные параметры потока, которые, как уже отме-

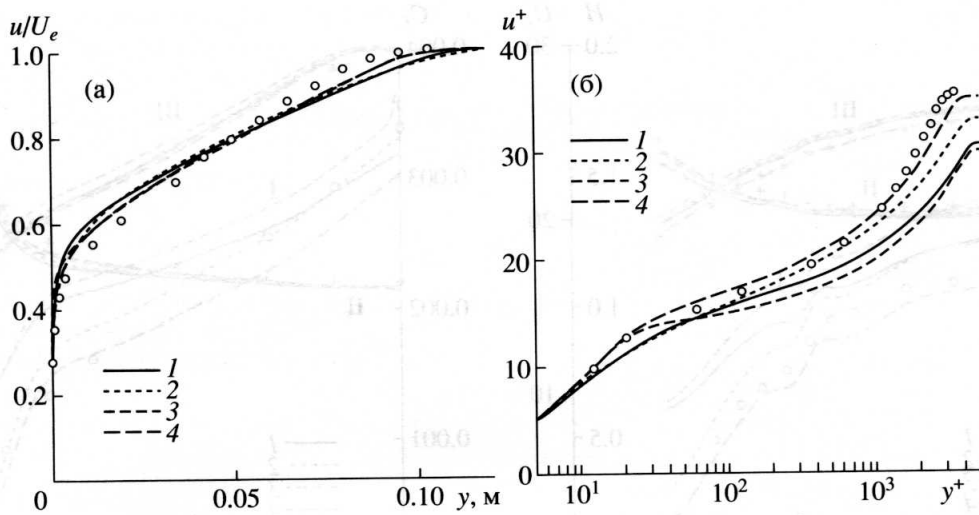


Рис. 8. Сопоставление экспериментальных и расчетных профилей скорости в опыте 4800 при  $x = 3.556$  м. Обозначения те же, что и на рис. 5.

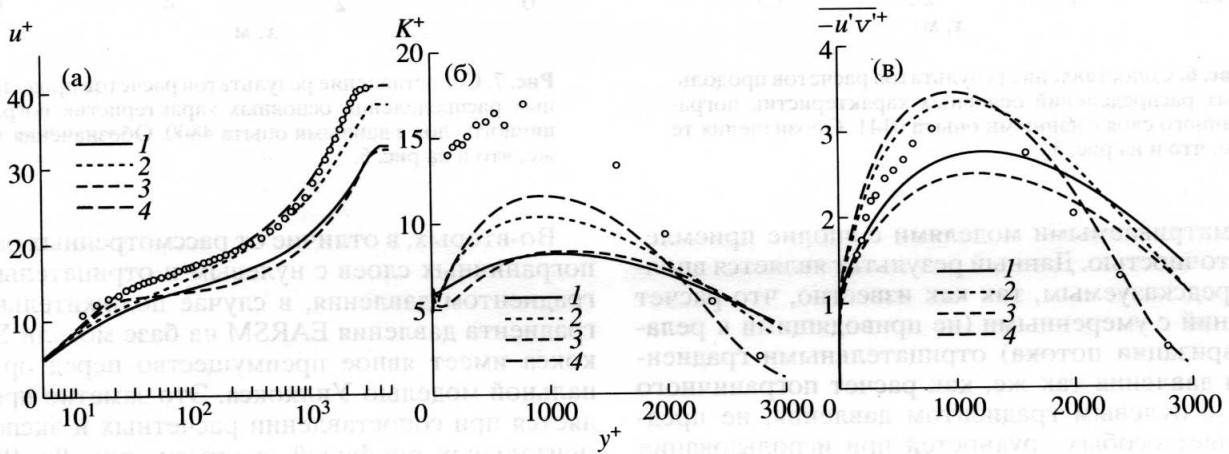


Рис. 9. Сопоставление результатов расчетов профиля скорости – а, кинетической энергии турбулентности – б и касательного реингольдова напряжения – в для опыта 0141 при  $x = 3.4$  м. Обозначения те же, что и на рис. 5.

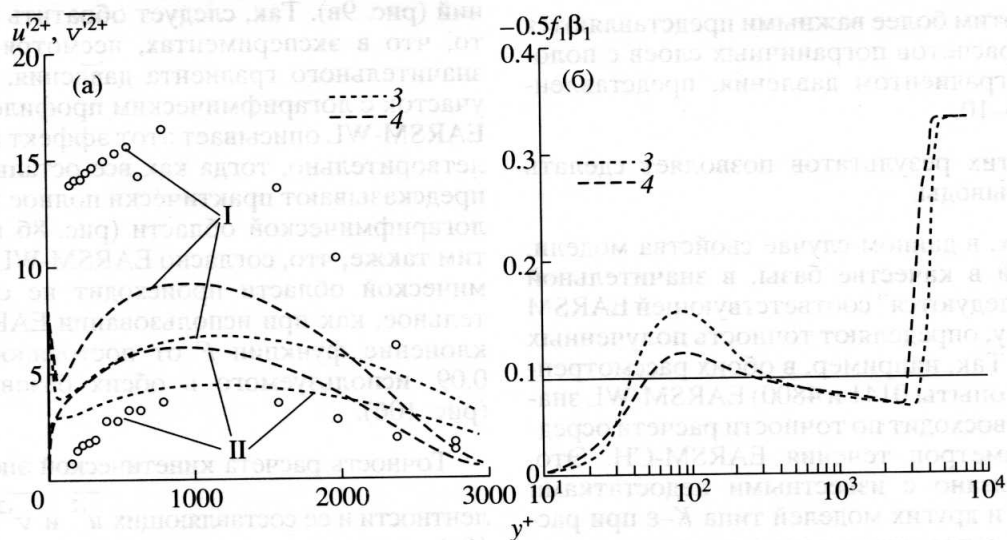


Рис. 10. Профили нормальных составляющих тензора реингольдовых напряжений – а и функции  $-0.5f_1\beta_1$  – б в опыте 0141 при  $x = 3.4$  м, рассчитанные с помощью моделей EARSM-CH – 3 и EARSM-WL – 4. На рис. 10а: I –  $\overline{u'^2}$ , II –  $\overline{v'^2}$ , точки – эксперимент.

чалось, полностью определяются величиной  $\overline{u'v'}$ , данный дефект EARSM может оказаться важным при расчете более сложных течений, в которых существенную роль играют все составляющие тензора рейнольдсовых напряжений.

**Заключение.** Таким образом, полученные результаты позволяют заключить, что применительно к расчету канонических пристенных пограничных слоев преимущества EARSM перед традиционными моделями турбулентности проявляются прежде всего при расчете пульсационных параметров потока, хотя и EARSM не обеспечивают достаточно точного предсказания кинетической энергии турбулентности и ее отдельных составляющих. Важно также отметить, что точность EARSM существенно зависит от выбора базовой модели и в этом смысле  $K-\omega$  модель лучше  $K-\epsilon$ -модели. Наконец, результаты расчетов обтекания плоской пластины свидетельствуют о необходимости более тщательной доработки EARSM совместно с базовой моделью.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-02-16492).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rodi W.* The Prediction of Free Turbulent Boundary Layers by Use of a Two Equation Model of Turbulence. Ph. D. Thesis, Univ. London, 1972.
2. *Speziale S.G.* Comparison of Explicit and Traditional Algebraic Stress Models of Turbulence // *AIAA J.* 1997. V. 35. № 9. P. 1506.
3. Методы расчета турбулентных течений / Под ред. Коллмана В. М.: Мир, 1984.
4. *Wallin S., Johansson A.V.* A New Explicit Algebraic Reynolds Stress Turbulence Model for 3D Flow. Proc. the 11 th Sympos. on Turbulent Shear Flows. Grenoble, France, 1997. V. 2. P. 13.
5. *Wallin S., Johansson A.V.* A New Explicit Algebraic Reynolds Stees Turbulence Model Including an Improved Near-Wall treatment. Flow Modeling and Turbulence Measurements VI. Chen. Shin. Lienau & Kung (eds). 1996. Balkema, Rotterdam.
6. *Gatski T.B., Speziale C.G.* On Explicit Algebraic Stress Model for Complex Turbulent Flows // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 254. P. 59.
7. *Abid R., Rumsey C., Gatski T.B.* Prediction of Non-Equilibrium Turbulent Flows with Explicit Algebraic Stress Models // *AIAA J.* 1995. V. 33. № 11. P. 2026.
8. *Kim J.* On the Structure of Pressure Fluctuations in Simulated Turbulent Channel Flow // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 285. P. 421.
9. *Chein K.-Y.* Prediction of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model // *AIAA J.* 1982. V. 20. № 1. P. 33.
10. *Wilcox D.C.* // Comparison of Two-Equation Turbulence Models for Boundary Layers with Pressure Gradient // *AIAA Journal.* 1993. V. 31. № 8. P. 1414.
11. *Durbin P.A.* Near-Wall Turbulence Closure Modeling without "Dumping Functions" // *Theoret. Comput. Fluid Dynamics.* 1991. № 3. P. 1.
12. *Catherall D., Mangler K.W.* The Integration of the Two Dimensional Laminar Boundary-Layer Equations Past the Point of Vanishing Skin Friction // *J. Fluid Mech.* 1966. V. 26. P. 163.
13. *Гарбарук А.В., Ланин Ю.В., Стрелец М.Х.* Применение обратного метода решения уравнений пограничного слоя для тестирования моделей турбулентности // *ТВТ.* 1998. Т. 36. № 4. С. 607.
14. *Menter F.R.* Zonal Two Equation  $K-\omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows // *AIAA Paper.* 1993.
15. *Coles D.E., Hirst E.A.* Computation of Turbulent Boundary Layers – 1968. AFOSR-IFP Stanford Conference. V. 2. Stanford Univ. Palo Alto. CA. 1969.
16. *Samuel A.E., Joubert P.N.* A Boundary Layer Developing in an Increasingly Adverse Pressure Gradient // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 66. P. 481.
17. *Coles D.* A Model for Flow in the Viscous Sublayer. Proc. the Workshop on Coherent Structure of Turbulent Boundary Layers. Lehigh Univ. Bethlehem. Pa. 1978.