

*Ю.В. Лапин.*

## **Статистическая теория турбулентности (прошлое и настоящее – краткий очерк идей)**

### **§1. Турбулентность: определение, механизмы, закономерности.**

Течения жидкостей и газов, наблюдаемые в природных условиях и технических устройствах, делятся на два сильно отличающиеся друг от друга типа: ламинарные – спокойные, плавные, регулярные и турбулентные, в которых скорость, давление, температура и другие гидродинамические величины изменяются хаотично, неупорядоченно не только во времени, но и в пространстве.

По-видимому, наиболее емкое и содержательное определение турбулентности принадлежит П.Брэдшоу (1971) [1]: «турбулентность – это трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения. Она является обычным состоянием движущейся жидкости, за исключением течений при малых числах Рейнольдса».

Существование резко различающихся ламинарных и турбулентных режимов течения было замечено еще в первой половине XIX в., но начало теории турбулентности было положено лишь в конце того же столетия в работах Осборна Рейнольдса (1883) [2\*, 3\*]<sup>1</sup>. Изучая условия перехода ламинарного течения жидкости в трубах в турбулентное, Рейнольдс установил

---

<sup>1</sup> В некоторых случаях ссылки на оригинальные работы обычно исторического плана заменены ссылками на более поздние издания обобщающего характера, отмеченные звездочками. В этих изданиях, помимо ссылок на оригинал, читатель может ознакомиться с более или менее подробным комментарием к цитируемой работе.

существование общего критерия динамического подобия течений вязкой несжимаемой жидкости, названного впоследствии его именем:  $Re=U \cdot L/\nu$  – число Рейнольдса, где  $U$  и  $L$  – характерные масштабы скорости и длины в рассматриваемом течении, а  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости (например, для течения в трубе –  $U$  – среднерасходная скорость,  $L$  – диаметр трубы). Из опытов Рейнольдса следовало, что существенное влияние на характер течения в трубе оказывают возмущения на входе в нее. Если число  $Re$  достаточно мало, то эти возмущения затухают на некотором расстоянии, а течение в трубе является ламинарным. При достижении числом  $Re$  критического значения (в опытах Рейнольдса  $Re_{кр} \approx 2000$ ) возмущения не затухают и движение в трубе становится турбулентным.

Наиболее распространенной является интерпретация числа Рейнольдса как меры относительной значимости сил инерции и сил вязкости, действующих внутри жидкости. Силы инерции, если они существенно превосходят силы вязкости, что соответствует большим числам  $Re$ , вызывают перемешивание конечных объемов жидкости, движущихся с разными скоростями. В результате осуществляется передача энергии от крупномасштабных структур (вихрей) к менее крупным, образующимся за счет потери устойчивости более крупных вихрей. Иными словами, крупномасштабные структуры играют роль аккумуляторов энергии из основного потока. Поглощая энергию основного потока, эти структуры оказываются сильно анизотропными, завихренными и существенно отличаются от течения к течению.

Основным механизмом генерации энергии турбулентности является деформация структур, представляющая собой трехмерный процесс, поэтому все развитые турбулентные течения являются трехмерными. Посредством нелинейных взаимодействий крупномасштабные структуры передают часть своей энергии менее крупным структурам и т.д. в результате реализуется так называемый каскадный механизм передачи энергии.

Впервые описание этого процесса было дано Льюисом Ричардсоном

(1922) [2\*, 3\*]. Согласно Ричардсону каскадный процесс передачи энергии в турбулентном потоке, базирующийся на представлении о существовании иерархии вихрей, завершается на самых мелкомасштабных структурах вязкой диссипацией кинетической энергии в тепло. Однако понимание роли мелкомасштабной турбулентности в процессах турбулентного переноса пришло лишь после опубликования работы Джеффри Тэйлора (1935) [2\*, 3\*], в которой впервые было введено понятие об однородной и изотропной турбулентности. Основным свойством такой турбулентности является ее слабая зависимость от индивидуальных особенностей течения (локальная изотропия). В предельном случае можно говорить об инвариантности свойств изотропной турбулентности относительно любых ортогональных преобразований (параллельных переносов, вращений и т. д.).

Наиболее важные и принципиальные результаты в изучении мелкомасштабной турбулентности были получены Андреем Николаевичем Колмогоровым (1941) [4, 3\*] – создателем целостной теории локально изотропной турбулентности. Прежде всего, Колмогоров существенно дополнил представление о каскадном процессе передачи энергии, отметив ослабление ориентирующего влияния среднего течения при каждом переходе к более мелким структурам и, исходя из этого, сформулировал гипотезу о том, что статистический режим достаточно мелкомасштабной турбулентности, т. е. турбулентности при больших числах Рейнольдса, является универсальным и определяется лишь двумя размерными параметрами – средней скоростью диссипации энергии  $\varepsilon$  и коэффициентом вязкости  $\nu$ . Из сказанного не следует, что статистический режим мелкомасштабной турбулентности совсем не зависит от осредненного течения. Последнее влияет на этот режим через величину потока энергии, передающегося от самых крупных структур через всю их иерархию, вплоть до самых малых, на которых механическая энергия превращается в тепло. Средняя скорость диссипации  $\varepsilon$ , характеризующая среднее количество энергии, переходящей в тепло в единице массы жидкости

за единицу времени, определяется соотношением

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \nu \cdot \sum_{i,j} \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2}, \quad u'_i = u_i - \bar{u}_i \quad (1)$$

Здесь  $u_i$  – актуальная скорость; чертой сверху обозначено осредненное ее значение; штрихом – пульсационная скорость. Диссипацией энергии осредненного течения под влиянием молекулярной вязкости при больших числах Рейнольдса обычно пренебрегается.

Гипотеза Колмогорова об универсальности статистического режима мелкомасштабной турбулентности и его зависимости только от диссипации  $\varepsilon$  и коэффициента вязкости  $\nu$ , а также соображения размерности позволяют оценить нижнюю границу линейных, скоростных и временных масштабов структур (вихрей), участвующих в процессе диссипации энергии

$$\eta_k = \left( \nu^3 / \varepsilon \right)^{1/4}, \quad V_{\eta_k} = (\nu \varepsilon)^{1/4}, \quad t_{\eta_k} = \left( \nu / \varepsilon \right)^{1/2} \quad (2)$$

Названный колмогоровским масштаб  $\eta_k$ , характеризует линейные размеры структур, на которые вязкость еще оказывает существенное влияние.

Степень многомасштабности процессов турбулентного переноса можно оценить, соотнося наибольший характерный размер течения  $L$  с колмогоровским масштабом  $\eta_k$ . Из соображений размерности ясно, что отношение  $L/\eta_k$  пропорционально числу Рейнольдса в степени  $3/4$ , т.е.

$$L/\eta_k \sim \text{Re}_L^{3/4} \quad (3)$$

Для пограничного слоя наименьшим масштабом является вязкостный масштаб  $\ell_v = \nu/v_*$ , ( $v_* = \left( \tau_w / \rho \right)^{1/2}$ ,  $\tau_w$  – напряжение трения на стенке). Составляя отношение толщины слоя  $\delta$  к  $\ell_v$  и используя для оценок известные степенные зависимости толщины слоя и коэффициента трения на пластине от числа Рейнольдса  $\text{Re}_x = Ux/\nu$ , можно показать, что

$$\text{Re}_\delta = \frac{\delta}{\nu/v_*} \sim \text{Re}_x^{0,8} \quad (4)$$

Справедливость колмогоровской теории локально изотропной турбулентности была подтверждена результатами многочисленных экспериментов.

На рис. 1 приведены результаты измерений в различных течениях спектральной плотности энергии  $E_1(k)$  пульсаций продольной составляющей скорости  $u'$  (одномерный продольный спектр)

$$\int_0^{\infty} E_1(k) dk = \overline{u'^2} \quad (5)$$

Здесь  $k$  – волновое число, определяемое как параметр, обратный линейному масштабу структуры (вихря). Для удобства по оси ординат отложена безразмерная спектральная плотность  $\Phi = E_1(k)/(\varepsilon \nu^5)^{1/4}$ ; по оси абсцисс отложено безразмерное волновое число  $k/k_k$ , где  $k_k = 1/\eta_k = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$  – волновое число Колмогорова. На рис. 1 видно, что структура крупномасштабных вихрей (малые  $k$ ) меняется в зависимости от типа течения (и числа Рейнольдса), а мелкомасштабные вихри, участвующие в диссипации (большие  $k$ ) являются универсальными, не зависящими от типа течения и числа Рейнольдса.

Наличие прямолинейного участка на кривой продольного одномерного спектра  $\Phi$ , описываемого соотношением

$$\Phi = C \left( \frac{k}{k_k} \right)^{-5/3}, \quad (6)$$

получившим наименование «закона пяти третей», свидетельствует о наличии инерциальной области спектра, на которую вязкость влияние не оказывает. Нетрудно убедиться в том, что на этом участке спектральная плотность  $E_1$  представляется равенством

$$E_1(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (7)$$

Установление закона «пяти третей» и его экспериментальное подтверждение – один из наиболее важных итогов развития статистической теории турбулентности в XX столетии. Помимо принципиальной значимости этого закона для понимания общих закономерностей процессов переноса в

турбулентных потоках, нельзя не отметить его едва ли не ключевую роль при разработке современных высокоэффективных вычислительных технологий, таких как метод Моделирования Крупных Вихрей (LES в англоязычной литературе) и метод Моделирования Отсоединенных Вихрей (DES), характеристика которых будет дана ниже.

Еще один важнейший результат колмогоровской теории локально изотропной турбулентности – установление универсальной связи между турбулентной вязкостью, кинетической энергией турбулентности и скоростью диссипации (формула Колмогорова), лежащей в основе большинства современных дифференциальных полуэмпирических моделей турбулентности, базирующихся на уравнениях для вторых моментов (см. §2).

## **§2. Моделирование турбулентности на основе метода Рейнольдса (полуэмпирические теории).**

Говоря о полуэмпирических теориях турбулентности, уместно вернуться к работам О. Рейнольдса, ставшим основой современной статистической теории турбулентности. Во второй цитируемой работе Рейнольдса, относящейся к 1894 г. [3\*, 6\*], впервые было предложено представлять мгновенные значения всех гидродинамических величин в турбулентном течении в виде суммы осредненных (регулярных) и пульсационных составляющих. В этом случае можно ограничиться лишь изучением осредненных величин, сравнительно плавно меняющихся во времени и пространстве, которые чаще всего и представляют основной интерес для практики, при этом осреднение гидродинамических величин понимается как теоретико-вероятностное осреднение по соответствующему статистическому ансамблю или по времени. Таким образом, был открыт путь к применению математического аппарата теории вероятностей для изучения свойств турбулентности, а сама теория турбулентности приобрела полностью статистический характер.

Однако понадобилось почти 30 лет после работы Рейнольдса (1894), для

осознания того, что корреляционные функции и другие статистические моменты гидродинамических величин являются основными характеристиками турбулентного движения. В частном случае это было показано в работе Дж. Тейлора (1926) [3\*], посвященной изучению турбулентной диффузии; в общем виде этот важнейший результат был получен в работе А.А. Фридмана и Л.В. Келлера (1924), которые предложили общий метод построения на основе уравнений движения жидкости дифференциальных уравнений для моментов произвольного порядка гидродинамических полей турбулентных течений.

Вследствие нелинейности исходных уравнений гидродинамики бесконечная система уравнений Фридмана-Келлера обладает тем свойством, что уравнения для моментов младшего порядка всегда содержат моменты более старшего порядка. Поэтому любая конечная система этих уравнений всегда является незамкнутой. Вся последующая история статистической теории турбулентности была во многом связана с проблемой замыкания. Для решения этой проблемы потребовалось проведение необычайно широкомасштабных экспериментальных исследований свойств турбулентности при течениях в трубах, каналах, пристенных пограничных слоях и свободных струйных течениях. На основе представлений, полученных в этих исследованиях, были построены так называемые полуэмпирические теории турбулентности.

Осреднение по Рейнольдсу уравнений динамики вязкой жидкости (уравнений Навье-Стокса) приводит к уравнениям Рейнольдса, чаще называемым уравнениями для первых моментов. В общем случае проблема замыкания этих уравнений сводится к установлению связи тензора турбулентных (рейнольдсовых) напряжений

$$\tau_{jk}^r = \rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

с тензором осредненных скоростей деформаций.

Вероятно, первая, основанная на чисто интуитивных соображениях,

попытка описания процессов переноса количества движения в турбулентных потоках принадлежит Буссинеску (1877) [2\*, 3\*, 6\*]. Согласно модели Буссинеска турбулентное движение среды рассматривалось как движение ньютоновской «турбулентной жидкости». Иными словами формула, получившая имя Буссинеска, предполагала линейную связь тензора турбулентных напряжений с тензором осредненных скоростей деформаций

$$\tau_{jk}^r / \rho = -\frac{1}{3} \overline{v'_i v'_i} \cdot \delta_{ij} + \nu_T \cdot \left( \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial s_k} + \frac{\partial \overline{v}_k}{\partial s_j} \right) \quad (9)$$

Здесь штрихами обозначены пульсации скоростей, а чертой сверху – осредненные по времени величины;  $\nu_T$  – кинематический коэффициент турбулентной вязкости,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера; по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Уместно отметить, что работа Буссинеска была опубликована задолго до появления в 1894 г. классической работы Осборна Рейнольдса.

Идея «градиентного» описания процессов переноса количества движения в турбулентных потоках, заключенная в формуле Буссинеска (9), оказалась весьма плодотворной. Тем не менее, при оценке возможностей использования формулы Буссинеска необходимо иметь в виду, что градиентное представление потоков количества движения, хотя и позволяет описать очень широкий класс сдвиговых течений, однако не является универсальным, особенно это проявляется в областях с малой неоднородностью поля скорости (внешняя часть пограничного слоя; ось симметричного канала, где  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \rightarrow 0$ ), «населенных», как правило, крупномасштабными турбулентными структурами, обладающими свойствами анизотропии и наследственности (эффекты памяти).

*Модели турбулентности для замыкания уравнений для первых моментов (прандтлевский период 1925 – 60-е г. г.).*

Сформулированный Буссинеском градиентный подход к описанию процессов турбулентного переноса неявно заключал в себе допущение о



локальности механизмов этого переноса, т. е. зависимости их от локальных характеристик потока, в данном случае от скорости сдвига  $\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{s}_k}$ . Однако идея «локальности» не получила развития в работе Буссинеска, в которой коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_T$  рассматривался как постоянная величина, не связанная с характеристиками потока. Потребовалось почти пятьдесят лет, прежде чем в работе Прандтля (1925) [5] идея «локальности» обрела современные четкие контуры и была весьма эффективно использована для определения коэффициента турбулентной вязкости.

Современная формулировка гипотезы «локальности» была дана в работе Л.Г. Лойцянского (1958) [6\*]. Согласно этой формулировке «механизм турбулентного переноса количества движения полностью определяется заданием местных значений производных от осредненных скоростей по поперечной к направлению потока координате и физических свойств жидкости (плотности  $\rho$ )». Влияние процессов, происходящих вдали от рассматриваемой точки турбулентного потока, гипотезой локальности не учитывается. Уместно отметить, что сама местная скорость потока в соответствии с принципом относительности Галилея влияние на процессы переноса оказывать не может.

Важным элементом «гипотезы локальности» является ее предназначенность для описания течений, в которых с той или иной мерой условности можно выделить одно доминирующее направление (пристенные пограничные слои, струйные течения, течение в длинных каналах). Прямым следствием этого обстоятельства явилась неинвариантность моделей турбулентности, разработанных на основе гипотезы локальности, т. е. ограниченность их применимости только рамками уравнений пограничного слоя или параболизированных уравнений Рейнольдса. При этом уместно напомнить, что теория пограничного слоя базируется на преднамеренном отказе ее основателя от свойства инвариантности, т. е. предназначена изначально для описания течений с преимущественным направлением. Именно

это свойство и определило в конечном счете громадный успех этой теории не только как инструмента познания, но, прежде всего как мощного средства решения многочисленных прикладных проблем гидрогазодинамики.

В теории Прандтля (1925) принимается, что местное изменение осредненной скорости определяется только первой производной скорости  $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ , поэтому соображения размерности приводят к необходимости введения дополнительного линейного масштаба  $\ell$  – по существу, масштаба турбулентности, который необходимо определять из дополнительных, чисто эмпирических соображений.

$$\tau_{xy}^T = -\rho \overline{u'v'} = \rho \ell^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \quad (10)$$

Здесь:  $x$  – координата, совпадающая с направлением потока;  $y$  – поперечная координата;  $u', v'$  – проекции пульсационной скорости на оси координат;  $u$  – проекция осредненной скорости на ось  $x$ .

В целях популяризации Прандтль назвал масштаб турбулентности  $\ell$  путем перемешивания, вследствие чего соотношение (10) получило название гипотезы турбулентного пути перемешивания. Следует отметить, что формула Прандтля (10) будучи «локальной по духу», вместе с тем оставляет некоторые возможности для учета интегральных свойств потока, его предыстории благодаря неопределенности величины  $\ell$ .

Работа Прандтля (1925), по существу, положила начало всей современной полуэмпирической теории турбулентности, что и предопределило ее феноменальный успех в последующие годы. Одним из важнейших результатов теории Прандтля явилось установление универсального логарифмического закона для профиля скоростей в пристеночных областях течений в трубах, каналах, пограничных слоях. Монопольное положение теории Прандтля (прандтлевский период) в полуэмпирической теории турбулентности сохранялось около сорока лет и было прервано лишь в 60-е годы прошлого столетия появлением и возможностью реализации новых моделей

турбулентности, основанных на использовании уравнений для вторых моментов.

Некоторую конкуренцию теории Прандтля в прандтлевский период составила теория Т.Кармана (1930) [2\*, 6\*], в рамках которой локальные свойства потока определялись первой и второй производными от осредненной скорости по поперечной координате. В этом случае из соображений размерности следует формула

$$\tau_{xy}^T = \rho \kappa^2 \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^4 / \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \quad (11)$$

получившая название формулы Кармана; ( $\kappa=0.41$  – эмпирическая постоянная Кармана)

Отсутствие в формуле Кармана (11) пути перемешивания  $\ell$  делает ее в некоторых случаях предпочтительной по сравнению с формулой Прандтля (10). Существенным недостатком формулы (11) является невозможность ее применения к расчету течений, в которых профили скоростей имеют точку перегиба ( $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$ ,  $\tau_{xy}^T \rightarrow \infty$ ), в частности, струйных течений.

Весьма продуктивными для полуэмпирической теории пристенной турбулентности оказались 50-е годы, ознаменовавшиеся публикацией работ Е. Ван-Дрифта (1956) [8, 9\*] и Ф. Клаузера (1956) [7, 10\*].

В первой из них на основе довольно грубой аналогии<sup>2</sup> между движением вязкой жидкости вблизи колеблющейся пластины и турбулентным движением в окрестности стенки была решена проблема взаимодействия молекулярного и турбулентного переноса в пристеночной области турбулентного пограничного слоя (демпфирующий множитель Ван-Дрифта –  $D$ )

---

<sup>2</sup> Немного позднее более строгая теория демпфирующего множителя была предложена в работе Л.Г. Лойцянского (1960) [6\*].

$$D = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{yU_*}{\nu A}\right) \right]^2, \quad A = 26 \quad (12)$$

и введено понятие эффективной вязкости

$$\nu_{эфф} = \nu + \nu_T D \quad (13)$$

Это позволило отказаться от практического использования дискретной прандтлевской схемы (ламинарный подслой – турбулентное ядро) и открыло возможности непрерывного описания структуры внутренней области, включающей вязкий подслой, переходную область и область логарифмического профиля скоростей.

Работа Клаузера (1956), по существу, завершила в основных чертах формирование современных представлений о структуре пограничного слоя, как пятислойном образовании, включающем внутреннюю область с упомянутыми выше тремя подобластями, и внешнюю, включающую так называемую область закона следа с характерной для нее постоянной турбулентной вязкостью и область перемежаемости (надслоя), существование которой было экспериментально установлено несколько ранее Клебановым.

Схематически структура турбулентного пограничного слоя на пластине представлена на рис. 2. Внутренняя область, также называемая областью «закона стенки», включающая вязкий подслой (1), переходную область (2) и область логарифмического профиля скоростей (3), занимает примерно 20 % от толщины слоя; в ней, как свидетельствуют экспериментальные данные, вырабатывается около 80 % энергии турбулентности. Существование «закона стенки» (логарифмического профиля скоростей) обусловлено квазиизотропностью мелкомасштабной турбулентности, населяющей внутреннюю область. Опыты Клаузера по исследованию затухания возмущений, внесенных в пограничный слой, показали, что во внутренней области затухание происходит на «коротких» расстояниях порядка нескольких толщин пограничного слоя, в то время как во внешней области зона релаксации занимает несколько десятков тех же толщин. Это дало основание Клаузеру

вести представление о «короткой памяти» для внутренней и «долгой памяти» для внешней областей.

Принципиальное теоретическое и практическое значение для решения проблемы замыкания уравнений для первых моментов имела полученная Клаузером (1956) [7] формула турбулентной вязкости  $\nu_{To}$  для внешней области пограничного слоя. В качестве скоростного и линейного масштабов были использованы динамическая скорость  $v_*$  и интегральный дефект скорости

$\Delta = \int_0^{\infty} \frac{U_e - u}{v_*} dy$ . В этом случае из соображений размерности следует, что

$$\nu_{To} = kv_*\Delta = kv_e\delta^*, \quad k = 0.018, \quad \delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (14)$$

Здесь  $k$  – эмпирическая константа Клаузера,  $\delta^*$  – толщина вытеснения пограничного слоя,  $U_e$  – скорость на внешней границе пограничного слоя.

Формула Прандтля для турбулентной вязкости во внутренней области  $\nu_{Ti}$ , непосредственно вытекающая из (10) при условии  $\ell = \kappa y$  ( $\kappa = 0.41$ )

$$\nu_{Ti} = \kappa^2 y^2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (15)$$

вместе с соотношениями (12)–(14) составили полномасштабную модель турбулентной вязкости, широко используемую (в форме многообразных модификаций) [9\*, 10\*] в практических расчетах до настоящего времени.

В 1968 г. в Стэнфорде (США) состоялась 1–я Стэнфордская конференция, посвященная проблемам турбулентного пограничного слоя, оценке состояния и практических возможностей моделей турбулентности для замыкания уравнений для первых моментов. Общая тональность заключительного заявления конференции – неудовлетворенность. Для неудовлетворенности имелись веские основания. Обнаружилась неэффективность существующих подходов при оценке характеристик пограничных слоев в неравновесных условиях: знакопеременный продольный перепад давления; течения с большим положительным перепадом давления (предсказание точки отрыва); течение с

сильным отрицательным градиентом давления, приводящим к обратному переходу от турбулентного режима течения к ламинарному (реламинаризация) и др. Косвенным следствием оценок 1-й Стэнфордской конференции стало заметное снижение в последующие годы интереса к разработке алгебраических моделей, уменьшение масштабов экспериментальных исследований турбулентных пограничных слоев<sup>3</sup>.

Модели турбулентности, основывающиеся на уравнениях для вторых моментов.

В основе полуэмпирической теории Прандтля и ее многочисленных модификаций лежит гипотеза локальности механизма турбулентного переноса, согласно которой принимается, что турбулентные напряжения зависят только от локальной структуры осредненного течения. Эта гипотеза оказалась эффективной для описания равновесных течений, однако, для существенно неравновесных течений, в которых структура осредненного течения не соответствует внутренней структуре турбулентности, применение гипотезы локальности оказывается тем менее оправданным, чем больше степень этого несоответствия. Это обстоятельство диктует необходимость установления связей между компонентами тензора турбулентных напряжений и локальными параметрами турбулентности, поскольку равновесие внутренней структуры турбулентности устанавливается быстрее, чем равновесие между турбулентностью и осредненным течением.

Приведенные соображения стали исходной предпосылкой для разработки полуэмпирических теорий турбулентности на основе уравнений для вторых моментов, в частности, уравнения для кинетической энергии турбулентности и

---

<sup>3</sup> О результатах в области разработки алгебраических моделей в последнее время см. Ю.В. Лапин, А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец. «Алгебраические модели турбулентности для пристенных канонических течений (немного истории и некоторые новые результаты)» в этом выпуске «Ведомостей».

уравнений для рейнольдсовых напряжений. Для замыкания этих уравнений необходимо, как обычно, выразить неизвестные члены через набор определяющих параметров так, чтобы число уравнений соответствовало числу этих параметров. Возможности для более или менее обоснованного установления таких связей оказались чрезвычайно многообразны, что привело, в конечном счете, к разработке очень большого числа моделей подобного рода.

Фундаментальную роль в теории турбулентности, основанной на использовании уравнений для вторых моментов, сыграли работы А.Н.Колмогорова (1942) [12] и Прандтля-Вигхардта (1945) [10\*], в которых была предложена гипотеза, связывающая коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_T$  и кинетическую энергию турбулентности  $k = \frac{1}{2} \overline{\rho u_i u_i}$

$$\nu_T = c_\mu \sqrt{k/\rho} \times L \quad (16)$$

Здесь  $L$  – интегральный масштаб турбулентности,  $c_\mu$  – эмпирическая постоянная.

В предложении о градиентном механизме турбулентной диффузии, принятом в работе А.Н. Колмогорова, уравнение для  $k$  приобретает вид

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (u_j k) = \frac{\partial}{\partial s_j} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial s_j} \left( \frac{k}{\rho} \right) + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial s_j} \right] + \rho \nu_T \left( \frac{\partial u_k}{\partial s_j} + \frac{\partial u_j}{\partial s_k} \right) \frac{\partial u_k}{\partial s_j} - \rho \varepsilon \quad (17)$$

Здесь  $\mu = \rho \nu$  – коэффициент динамической вязкости;  $\sigma_k$  – эмпирическая постоянная.

Скорость диссипации энергии турбулентности  $\varepsilon$  в соответствии с гипотезой Колмогорова-Прандтля выражается при больших числах Рейнольдса через кинетическую энергию  $k$  и интегральный масштаб  $L$  соотношением

$$\varepsilon = C_d k^{\frac{3}{2}} / \rho L, \quad (18)$$

где  $C_d$  – эмпирическая постоянная.

Принятие гипотезы (18) означает, что процессом, определяющим скорость диссипации, является не сам процесс собственно диссипации, т. е.

процесс превращения кинетической энергии «мелкомасштабных вихрей» в тепло, а процесс переноса энергии последовательно от «больших вихрей» к «меньшим». Этот каскадный процесс, как предполагается, зависит лишь от величин  $\rho$ ,  $L$  и  $k$  и не зависит от вязкости.

Если исключить из формулы Колмогорова-Прандтля (16) интегральный масштаб  $L$  с помощью равенства (18), то получится соотношение, связывающее коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_T$ , кинетическую энергию турбулентности  $k$  и скорость диссипации энергии  $\varepsilon$ .

$$\nu_T = C_D C_\mu k^2 / \rho \varepsilon \quad (19)$$

Для использования уравнений (17)-(18) необходимо задание интегрального масштаба турбулентности. В наиболее простых моделях для определения этого масштаба использовалось допущение о его адекватности пути смешения, определяемого по формулам типа формулы Прандтля (15). В более сложных моделях вместо «алгебраических» выражений для масштаба турбулентности использовались дифференциальные уравнения. Однако наибольшее распространение получили двухпараметрические модели, в которых вместо уравнения для масштаба турбулентности используется уравнение для скорости диссипации энергии турбулентности  $\varepsilon$ . Семейство этих моделей получило наименование  $k$ - $\varepsilon$  моделей турбулентности.

Использование в качестве второго параметра скорости диссипации  $\varepsilon$  вместо масштаба турбулентности  $L$ , с которым эта величина связана соотношением (18), дает ряд практических преимуществ.

Уравнение для  $\varepsilon$  можно строго получить из уравнений Навье-Стокса путем соответствующей процедуры, включающей осреднение по Рейнольдсу. Это уравнение оказывается незамкнутым. Для замыкания необходимы модельные представления отдельных его членов. Ограничимся приведением следующей формы этого уравнения

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_j} = \frac{\partial}{\partial s_j} \left( \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_j} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \nu_T \left( \frac{\partial u_k}{\partial s_j} + \frac{\partial u_j}{\partial s_k} \right) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (20)$$



играющего базисную роль для многочисленного семейства  $k$ - $\varepsilon$  моделей. Приведем стандартные значения эмпирических постоянных, входящих в это уравнение:  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ ,  $c_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $c_{\varepsilon 2} = 1.92$  [10, 13, 14].

Уравнение (20) может быть использовано совместно с уравнениями (17), (19) для описания развитых турбулентных течений, т.е. течений, на которых не сказываются вязкостные, пристеночные эффекты. Применительно к турбулентным пограничным слоям это означает возможность их применения к областям течения, лежащим вне вязкого подслоя и переходной области. Это обстоятельство стало стимулирующим в создании приемов, заключающихся в использовании так называемых пристеночных функций, которые позволяют снести граничные условия с поверхности в точки, расположенные вне области влияния вязкости (как правило, в область логарифмического профиля скоростей).

Сущность введения пристеночных функций применительно к  $k$ - $\varepsilon$  модели в простейшем случае сводится к заданию скорости, кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации в некоторой точке  $c$ , расположенной в области логарифмического профиля скоростей

$$\frac{u_c}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[ E \frac{y_c v_*}{\nu} \right], \quad k_c = c_\mu^{-\frac{1}{2}} v_*^2, \quad \varepsilon_c = k_c^{\frac{3}{2}} \left( c_\mu^{\frac{1}{4}} \kappa y_c \right) \quad (21)$$

Здесь индексом  $c$  обозначены параметры в точке  $c$ ,  $c_\mu = 0.09$ ,  $\kappa = 0.4$ ,  $E = 7.7$ ,  $y_c$  – расстояние от поверхности до точки  $c$ ,  $v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$

Длительный опыт применения описанной выше стандартной  $k$ - $\varepsilon$  модели (17), (19), (20) с использованием различных модификаций пристеночных функций (так называемая высокорейнольдсова версия  $k$ - $\varepsilon$  модели) свидетельствует о нерешенности до настоящего времени многих проблем, связанных с описанием пристеночных эффектов при больших продольных перепадах давления, при малых и переходных числах Рейнольдса, в трехмерных течениях.

В связи с отмеченными обстоятельствами получили достаточно широкое распространение так называемые низкорейнольдсовые версии  $k$ - $\varepsilon$  – моделей, характерной особенностью которых стало использование многообразных форм демпфирующих множителей, так или иначе учитывающих влияние вязкости на характеристики турбулентности в окрестности стенки.

Меньшее распространение получили модели, основывающиеся не на гипотезе Колмогорова-Прандтля, а на гипотезе Невзгледова-Драйдена [14], согласно которой постулируется линейная связь турбулентного напряжения  $\tau_T$  и кинетической энергии турбулентности  $k$

$$\tau_T / k = a_1, \quad a_1 = 0.31 \quad (22)$$

Нетрудно видеть, что и гипотеза Невзгледова-Драйдена (22) и гипотеза Колмогорова-Прандтля (19) являются по своей структуре локальными, поскольку выражают локальное значение одной характеристики турбулентности через локальные значения других. Основная критика соотношения (22) базировалась на том, что  $\tau$  по своей природе тензорная величина, а  $k$  – скалярная. Тем не менее, это обстоятельство не помешало использовать гипотезу Невзгледова-Драйдена в высокорейнольдсовых версиях  $k$ - $\varepsilon$  моделей при формулировке пристеночных функций (второе из соотношений (21)).

Разработка моделей, основывающихся на уравнениях для вторых моментов, несомненно представляла значительный шаг вперед по сравнению с алгебраическими моделями. Несмотря на локальный характер соотношений Колмогорова-Прандтля (19) и Невзгледова-Драйдена (22) использование дифференциальных уравнений для определения характеристик турбулентности ( $k, \varepsilon, \tau_T$ ) позволило учесть конвективный и диффузионный перенос турбулентности, ее порождение за счет сдвиговых деформаций осредненного течения и диссипацию за счет сил вязкости. Тем не менее, оценки эффективности этих моделей, данные 2-й Стэнфордской конференцией (1980 г.), подведшей итоги более чем десятилетнего периода развития этого

направления, оказались мало отличающимися от оценок 1-й Стэнфордской конференции, данных алгебраическим моделям турбулентности. В ряду этих оценок особенно выделялась неудовлетворенность эффективностью многочисленного семейства  $k$ - $\varepsilon$  моделей применительно к расчету пристенных течений, в частности, к расчету отрыва турбулентного пограничного слоя под действием сильного положительного перепада давления.

Хроническое «недомогание»  $k$ - $\varepsilon$  моделей при их использовании к расчету пристенных течений, как выяснилось, имело «генетическую» природу, связанную с особенностями скорости диссипации  $\varepsilon$  как параметра турбулентности и условиями «настройки» уравнения для  $\varepsilon$  на определенный тип «закона стенки», отражающего характер профиля скоростей в пристеночной области.

Средством, позволившим существенно улучшить описание пристенных течений в рамках рассматриваемого класса моделей турбулентности, явилось использование вместо уравнения для скорости диссипации  $\varepsilon$  уравнения для параметра  $\omega = \varepsilon / c_\mu k$ . Этот параметр, иногда называемый «псевдозавихренностью», имеет размерность частоты ( $1/c$ ) и характеризует величину скорости диссипации, приходящуюся на единицу кинетической энергии турбулентности. Уместно отметить, что вторым из уравнений (помимо уравнения для кинетической энергии турбулентности), предложенных в основополагающей работе А.Н. Колмогорова (1942) для описания турбулентности, было уравнение для «частоты»  $\omega$ .

Разработка  $k$ - $\omega$  модели (Уилкоккс (1988)) [15] стала крупным успехом в моделировании пристенных течений при больших продольных перепадах давления.

Специфической особенностью почти четвертьвекового периода разработки дифференциальных моделей турбулентности (начиная с первой из семейства  $k$ - $\varepsilon$  моделей – модели Харлоу-Накаяма (1968)) явился ясно выраженный акцент на разработку двухпараметрических моделей ( $k$ - $L$ ,  $k$ - $\varepsilon$ ,  $k$ - $\omega$ ),

что, по умолчанию, подразумевало их большую перспективность по сравнению с однопараметрическими моделями. Начало 90-х гг., благодаря разработке высокоэффективных и достаточно универсальных однопараметрических моделей Спаларта-Аллмараса (1992) [16] и А.Н. Секундова и др. (1992) [17], базирующихся на уравнениях для турбулентной вязкости, поставило этот тезис под серьезные сомнения. Конкуренцию этим моделям составила, появившаяся годом позже, двухпараметрическая, так называемая, двухзональная  $k$ - $\omega$  модель Ментера (1993) [18]. В рамках этой модели во внутренней области использовалась модифицированная  $k$ - $\omega$  модель Уилкокса, а во внешней – стандартная  $k$ - $\varepsilon$  модель. Почти десятилетний период успешного применения этих моделей для решения многообразных практических задач в рамках метода Рейнольдса дает, как иногда кажется, достаточные основания для вывода о возможном исчерпании того научного и практического потенциала, рамки которого изначально очерчены постулатами Рейнольдса. При этом открытым остается, по-прежнему, вопрос о перспективах моделей турбулентности, базирующихся на уравнениях для компонент тензора напряжений Рейнольдса. Наряду с нерешенностью проблем замыкания этих уравнений, т. е. моделирования отдельных их членов, незначительной, но принципиальной в практическом плане, является трудность реализации этих моделей. Тем не менее, при оценке грядущих перспектив описания турбулентности в рамках рейнольдсового подхода вряд ли уместны крайние оценки. Критика ограниченности возможностей метода Рейнольдса сосредоточена в основном на процедуре осреднения, справедливо трактуемой как осреднение по всем масштабам, и применяемой при выводе уравнений для первых, вторых и более старших моментов. В то же время нельзя не заметить, что процесс моделирования отдельных членов этих уравнений, во многом основывающийся на тех или иных физических предпосылках и соображениях размерности, как правило, ориентирован не на весь спектр масштабов, а лишь на тот или иной их интервал. Показательна в этом смысле одна из наиболее представительных

современных дифференциальных моделей, уже упоминавшаяся выше так называемая двухзональная  $k-\omega$  модель Ментера (1993). Высокая эффективность этой, по существу, гибридной модели, не в последнюю очередь, связана с использованием во внутренней (пристеночной) области  $k-\omega$  модели, изначально ориентированной на разрешение мелкомасштабной турбулентности, а во внешней –  $k-\varepsilon$  модели, предназначенной для описания крупномасштабных когерентных структур. Станут ли гибридные модели одним из основных направлений дальнейшего развития классического метода Рейнольдса, покажет ближайшее будущее. Тем не менее, опасения относительно исчерпания ресурсного потенциала метода Рейнольдса сегодня представляются несколько преувеличенными.

### **§3 Альтернативные подходы к моделированию турбулентности.**

*Прямое численное моделирование (DNS – Direct Numerical Simulation в англоязычной литературе).*

Быстрый рост ресурсов памяти и быстродействия ЭВМ и неудовлетворенность результатами, получаемыми на основе метода Рейнольдса, уже в 60-е годы прошлого столетия обозначили серьезный интерес к методам прямого численного моделирования турбулентных течений на основе трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса. Фундаментальным основанием для использования этих уравнений служит то обстоятельство, что пространственно-временные масштабы турбулентности всегда существенно превосходят пространственно-временные масштабы молекулярных движений.

Рождение этого направления сопровождалось большой долей скепсиса относительно его будущего. Для пессимизма имелись и ныне имеются простые и очевидные основания, связанные с указанной выше большой величиной отношения наибольших характерных масштабов течения к наименьшим при высоких числах Рейнольдса ( $Re_L$ ). Поскольку диапазон изменения

пространственных масштабов, которые необходимо разрешить при расчете течения с числом  $Re_L$ , равен по порядку величины в соответствии с (3)

$$L/\eta_K \sim Re_L^{3/4},$$

то полное число пространственных степеней свободы имеет порядок

$$(L/\eta_K)^3 \sim Re_L^{9/4}.$$

Для того чтобы результаты расчета на основе нестационарных трехмерных уравнений Навье-Стокса были пригодны для определения средних величин, расчеты должны продолжаться в течении промежутка времени порядка  $L/V$  ( $V$  – характерная скорость), а шаг по времени не должен превышать  $\eta_K/V$ , так что для расчета одного варианта необходимо выполнить  $L/\eta_K$  шагов по времени. Следовательно, суммарное число шагов по времени и по пространству имеет порядок

$$Re_L^{3/4} \cdot Re_L^{9/4} \approx Re_L^3$$

Если принять в качестве оценки времени расчета и обработки на ЭВМ на одну степень свободы  $10^{-4}c$ , то для расчета течения при  $Re_L = 10^4$  потребуется  $10^8c$  (около трех лет). Согласно достаточно оптимистическому прогнозу (Ф.Спаларт,2000, [19]) использование DNS для решения крупномасштабных прикладных задач (расчет обтекания самолета) станет возможным к 2080 г.

Тем не менее, на основе DNS удалось получить ряд интересных результатов. Отметим, в частности, моделирование однородной изотропной турбулентности при умеренных числах Рейнольдса, моделирование инерционной подобласти спектра двумерной турбулентности и энергосодержащей области спектра трехмерной турбулентности. Особого упоминания заслуживает установление различий между двумерной и трехмерной турбулентностью: в первом случае каскадный процесс передачи энергии осуществляется вверх по шкале волновых чисел, т.е. в направлении к более крупным вихрям, а во втором – в обратном направлении, т. е. от крупных вихрей к мелким. Обзор ранних результатов, полученных в рамках DNS, можно

найти в работах (Д.Р. Чепмен (1980) [20]; У. Шуман, Г. Гретцбах, Л. Кляйзер (1984), [13]). Из более поздних исследований укажем на работу Ф. Спаларта, Дж. Ватмуффа (1993) [21], посвященную прямому численному моделированию турбулентного пограничного слоя с градиентом давления. Характерной особенностью течений, исследованных до настоящего времени в рамках DNS, является их пространственная ограниченность (течения в канале, пограничный слой) и сравнительно небольшие числа Рейнольдса. Едва ли следует надеяться на применение DNS в обозримом будущем к течениям с геофизическими масштабами.

### Моделирование крупных вихрей (LES – Large Eddy Simulation).

Естественная ограниченность методов прямого численного моделирования турбулентных течений (DNS) послужила стимулом для развития другого направления вычислительной гидроаэродинамики, получившего наименование метода моделирования крупных вихрей (крупномасштабных структур), хотя в действительности речь идет о моделировании вихрей с подсеточными масштабами, т. е. с масштабами меньшими размеров вычислительной сетки (расчетной ячейки). Истоки метода восходят к исследованиям метеорологов (50-е гг. прошлого столетия), посвященным численному моделированию циркуляции в атмосфере с целью описания деталей крупномасштабных движений. При этом статистическое влияние структур с подсеточными масштабами на крупномасштабные учитывалось заданием турбулентной вязкости, выбиравшейся на основе эмпирических данных. Чаще всего турбулентная вязкость считалась постоянной, не зависящей от пространственных координат и времени.

Основная идея метода LES заключается в формальном математическом разделении крупных и мелких структур посредством той или иной операции. Чаще всего в качестве такой операции используется операция фильтрации, согласно которой переменные ячеечного масштаба определяются уравнением

$$\bar{f}(r,t) = \int_V G(r,r') f(r',t) dV \quad (23)$$

а подсеточные переменные – как

$$f'(r,t) = f(r,t) - \bar{f}(r,t) \quad (24)$$

Здесь  $V$  – объем по которому проводится интегрирование;  $G(r,r')$  – функция фильтра с характерным масштабом длины  $\Delta$ . В качестве примера можно привести так называемый «ящичный» фильтр

$$G(r,r') = \begin{cases} 1, & |r-r'| < \Delta/2 \\ 0, & |r-r'| > \Delta/2 \end{cases} \quad (25)$$

Из последнего соотношения видно, что операция фильтрации означает, что в качестве среднего значения функции  $f$  в точке  $r$  берется среднее значение этой функции по объему параллелепипеда с гранями  $\Delta$ . Ясно, что чем больше объем осреднения  $\Delta^3$ , тем больше теряется информации о процессах переноса с масштабами, меньшими  $\Delta$ . Иными словами операция фильтрации, по существу, является операцией сглаживания. Операция осреднения с фильтром приводит к уравнениям, содержащим, как обычно, средние значения произведений скоростей  $\overline{u_i u_j}$  и члены, содержащие скорости  $u'_i$  мелкомасштабных пульсаций, в том числе тензор напряжений –  $\overline{u'_i u'_j}$  для этих пульсаций. Этот тензор, характеризующий влияние мелкомасштабных вихрей на эволюцию крупномасштабных вихрей, необходимо моделировать, т. е., как и в методе Рейнольдса, установить его связь со средними скоростями  $\overline{u_i}$ . Последнее и составляет суть методики подсеточного моделирования. Изначально были веские причины надеяться, что подсеточные модели должны быть более универсальны, чем одноточечные модели замыкания, используемые в методе Рейнольдса, поскольку мелкомасштабная турбулентность по природе своей более «универсальна» по сравнению с крупномасштабной. За прошедшее время было опробовано достаточно большое количество подсеточных моделей, фильтров, граничных условий (обзор ранних работ в этой области содержится в сб. под ред. Ф. Дурста, Б.Е. Лаундера (1982) [22], а также в обзоре



Дж. Ферцигера (1977) [23]). Тем не менее до сих пор нет полной ясности с выбором оптимального варианта подсеточной модели и размеров фильтра; к этому добавляются трудности вычислительной реализации. В связи с этим вероятно наиболее предпочтительной в практическом плане является «алгебраическая» по сути модель Смагоринского (1963,1971) [22].

В ее основание положены два соображения. Первое из них, во многом сходное с соображениями Колмогорова, предполагает, что турбулентная вязкость  $\nu_T$  определяется средним значением скорости диссипации энергии турбулентности  $\varepsilon$ , приходящейся на единицу объема. В этом случае из соображений размерности следует

$$\nu_T \sim \varepsilon^{1/3} \cdot \Delta^{4/3} \quad (26)$$

Здесь  $\Delta$  – характерный линейный масштаб фильтра.

Величина скорости диссипации  $\varepsilon$  непосредственно не известна. Второе соображение базируется на особенностях инерционного интервала спектра энергии турбулентности (рис. 1). В случае, если этот интервал выражен достаточно отчетливо (длинный интервал), скорость диссипации может быть выражена через среднюю скорость деформации ячеечного масштаба  $\bar{s} = 2(\bar{s}_{ij} \cdot \bar{s}_{ij})$ , ( $\bar{s}_{ij}$  – осредненный тензор скоростей деформаций), из соотношения

$$\bar{s} \sim \varepsilon^{2/3} \Delta^{-4/3} \quad (27)$$

С учетом (27) соотношение (26) преобразуется к виду

$$\nu_T = c^2 \Delta^2 \bar{s}^{-1/2} \quad (28)$$

где  $c$  – эмпирическая постоянная, значение которой в формуле Смагоринского (28) обычно определяется на основе расчета процесса затухания однородной изотропной турбулентности. В частности, выбранное значение постоянной  $c$  должно обеспечивать правильный, т. е. совпадающий с экспериментальным, наклон спектра в инерциальной области волновых чисел  $k$ .

Модели турбулентной вязкости типа Смагоринского (28) иногда называются теорией подсеточного масштаба первого порядка. Нетрудно

провести аналогию между алгебраическими моделями, используемыми в методе Рейнольдса, и моделями подсеточного масштаба в методе LES.

Наряду с этим в рамках метода LES велись разработки моделей подсеточного масштаба второго порядка (Д. Лилли, 1967) [22], аналогом которых в методе Рейнольдса являются модели для компонент тензора напряжений Рейнольдса. Однако это направление, в том числе и в связи с трудностями его вычислительной реализации, не получило такого же развития, как и моделирование подсеточных масштабов первого порядка.

О возможностях метода LES можно судить по перечню рассмотренных в рамках этого метода задач (Дж. Ферцигер, 1977) [23]: течение в канале; течение в прямоугольной пространственной области; исследование корреляций давления с производными скорости для течения в канале; радиальное перемешивание течения в вертикальном канале под действием сил плавучести и др.<sup>4</sup> Оценивая перспективы широкомасштабного применения метода LES для решения прикладных задач, можно сослаться на упоминавшийся выше прогноз Ф. Спаларта, согласно которому перечисленные выше возможности метода LES реализуются к 2045 г.

О результатах, полученных в рамках метода LES до 1995 г., можно судить по обстоятельному обзору В. Роди, Дж. Ферцигера и др. (1997) [24].

#### Моделирование отсоединенных вихрей (DES – Detached Eddy Simulation)

Как отмечалось выше, использование Прямого Численного Моделирования (DNS) и метода Моделирования Крупных Вихрей (LES) для описания турбулентных течений при больших числах Рейнольдса (до  $Re = 10^7$ ) в настоящее время невозможно из-за недостаточности вычислительных ресурсов

---

<sup>4</sup> Некоторые из результатов применения метода LES к задачам нестационарной турбулентной конвекции представлены в публикуемой в этом сборнике статье Е.М. Смирнова, А.Г. Абрамова, Н.Г. Иванова, А.Б. Корсакова.

современных компьютеров.

Метод Рейнольдса, базирующийся на использовании стационарных или нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, замкнутых с помощью тех или иных полуэмпирических моделей турбулентности, неэффективен при моделировании турбулентных течений с относительно большими отрывными зонами. Наличие в таких течениях нестационарных крупномасштабных трехмерных структур, свойства которых зависят от конкретных граничных условий и геометрических характеристик рассматриваемого течения, оставляет мало надежд на построение в будущем полуэмпирических моделей, пригодных для этих целей.

Указанные обстоятельства явились стимулом для поиска новых подходов к моделированию турбулентных течений. Наиболее эффективный из них был предложен в работе профессора кафедры гидроаэродинамики СПбГПУ М.Х. Стрельца, Ф. Спаларта (США) и др. (1997) [25] и получил наименование метода Моделирования Отсоединенных Вихрей (DES). Идея метода DES заключается в использовании метода Рейнольдса только в тех областях потока, где размер используемой вычислительной сетки  $\Delta$  недостаточен для разрешения турбулентных структур с линейными масштабами  $L_T$ , меньшими  $\Delta$ , т. е.  $L_T < \Delta$  (например,  $L_T$  – характерная толщина пограничного слоя); в остальной области течения, где  $\Delta < L_T$  используется метод LES – Моделирования Крупных Вихрей. Конкретная реализация метода DES, предложенная в работе [25], основывается на использовании для замыкания уравнений Рейнольдса модифицированной дифференциальной модели турбулентной вязкости Спаларта-Аллмараса [16]. Суть модификации заключается в замене фигурирующего в диссипативном члене этой модели в качестве линейного масштаба турбулентности расстояние до стенки  $L$  на величину  $\bar{L}$ , определяемую соотношением

$$\bar{L} = \min[L, C_{DES}\Delta] \quad (29)$$

Здесь  $\Delta$  – размер сетки (в работе [25] для неоднородной сетки  $\Delta$

определяется, как максимальный из трех ее шагов  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ );  $C_{DES}$  – единственная новая эмпирическая постоянная (аналог константы Смагоринского). Для пристенных отрывных течений условие (29) приводит к тому, что в области присоединенного пограничного слоя, населенной мелкими турбулентными вихрями, с характерной для пограничного слоя сильно анизотропной сеткой ( $\Delta_x = \Delta_z \gg \Delta_y$ ) выполняется неравенство  $L < C_{DES} \cdot \Delta$ , и следовательно в качестве масштаба используется реальное расстояние до стенки  $L$ . Таким образом в области присоединенного пограничного слоя реализуется подход, основанный на уравнениях Рейнольдса, замкнутых с помощью модели Спаларта-Аллмараса.

В отрывной области, населенной крупномасштабными структурами, выполняется условие  $L > C_{DES} \cdot \Delta$ . В этом случае модель Спаларта-Аллмараса переходит в дифференциальную подсеточную модель турбулентности, которая при выполнении условия равновесия (генерация = диссипации) аналогична рассмотренной выше классической алгебраической подсеточной модели Смагоринского (29). Иными словами, в области отрыва («отсоединенных» вихрей) реализуется метод Моделирования Крупных Вихрей (LES). Таким образом, в рамках метода DES органично сочетаются высокая точность и экономичность метода Рейнольдса в области присоединенного пограничного слоя и универсальность метода LES в отрывных областях потока.

Сравнение результатов расчетов по методу DES с экспериментальными данными для широкого круга турбулентных с обширными отрывными зонами течений продемонстрировало необычайно высокую эффективность метода DES, в том числе экономичность в использовании вычислительных ресурсов ЭВМ ([25], см. также М. Брейер и др. (2003), [26]). Отметим лишь один из этого ряда весьма впечатляющий результат: великолепное совпадение расчетных и опытных данных по коэффициентам подъемной силы и сопротивления профиля крыла в диапазоне углов атаки от 0 до 90°. Аналогичные сопоставления результатов расчетов на основе нестационарных уравнений Рейнольдса с теми

же опытными данными показало их удовлетворительное согласие лишь при углах атаки, меньших  $20^\circ$ , т. е. для режимов течения с относительно небольшими отрывными зонами.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> Более подробное описание метода *DES* и некоторые результаты его применения к расчету турбулентных течений с обширными зонами отрыва см. в статье: М.Х.Стрелец, Ф.Р.Спаларт, А.К.Травин, М.Л.Шур, публикуемой в этом номере «Ведомостей СПбГПУ».

## **Заключение.**

Разработку высокоэффективной методологии DES в рамках российско-американского сотрудничества (СПбГПУ-Боинг), несмотря на относительно небольшой период ее практической апробации (1997-2003), в определенной степени можно рассматривать как результат «прорывного» масштаба в области математического моделирования турбулентных потоков с обширными отрывными зонами. При этом, естественно, остаются актуальными нерешенные до настоящего времени в полном объеме в рамках рейнольдсова подхода проблемы пристенной турбулентности. В ряду таких проблем, для вынужденно-конвективных течений, едва ли не центральной, остается проблема моделирования пристенных функций для высокорейнольдсовых версий дифференциальных моделей турбулентности; проблема перехода от ламинарного режима течения к турбулентному и обратного перехода от турбулентного режима к ламинарному (реламинаризация потока) под влиянием сильного благоприятного перепада давления; учет влияния продольной кривизны поверхности на характеристики турбулентного пограничного слоя и др. В перечень малоизученных проблем вынужденной конвенции следует включить проблему моделирования процессов тепло-массообмена в турбулентных потоках с обширными зонами отрыва; ожидают своего решения многие проблемы свободной и смешанной конвенции.

Завершая краткое, далеко не полное, отчасти хронологическое описание становления некоторых идей и подходов, лежащих в основании математического моделирования турбулентности, трудно избавиться от ощущения, что кажущиеся иногда весьма пессимистическими прогнозы относительно сроков решения тех или иных проблем турбулентности, со временем представляются излишне оптимистическими, в очередной раз напоминая об умении природы хранить свои тайны.

## Литература.

1. Бредшоу П. Введение в турбулентность и ее измерение. М.: Мир, 1974.
2. Гольдштейн С. (ред.). Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, г. 1-2. М.: ИЛ, 1948.
3. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика, г. 1-2. М.: Наука, 1965, 1967.
4. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.- Докл. АН СССР, Т. 30, № 4, С. 299-303.
5. Prandtl L. Uber die ausgebildete turbulenz. – ZAMM, 1928, № 5.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Изд. 6-е, М.: Наука, 1987.
7. Клаузер Ф. Турбулентный пограничный слой: Проблемы механики, вып. 2. М.: ИЛ, 1959, С. 297-340.
8. Van-Driest E.R. On turbulent flow near a wall. J. Aeronaut. Sci., 1956, v. 23, № 10.
9. Лапин Ю.В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. Изд. 2-е, М.: Наука, 1982, 312 с.
10. Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989, 368 с.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
12. Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, теор. физ. 1942, т. 6, № 1-2.
13. Колльман В. (ред). Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984, с. 464.
14. Фрост У., Моулден Т. (ред). Турбулентность: принципы и применения. М.: Мир, 1980, с. 562.
15. Wilcox D.C. Multiscale Model for Turbulent Flows. AIAA Journal, 1988, v. 26, № 11, p. 1311-1320.
16. Spalart P.R., Allmaras S.R. A One–Equation Turbulence Model for Aerodynamic

- Flows. AIAA Paper 92-0439, Jan. 1992.
17. Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н. К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1993, № 4, с. 69.
  18. Menter F.R. Zonal Two-Equation  $k-\omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows. AIAA Paper 93-2306, Jun. 1993.
  19. Spalart P.R. Strategies for turbulence modelling and simulation. Intern. Journal of Heat and Fluid Flow, 2000, v. 21, pp. 252-263.
  20. Чепмен Д.Р. Вычислительная аэродинамика и перспективы ее развития. Ракетн. техн. и космонавт., 1980, т. 18, № 2, с. 3-32.
  21. Spalart P.R., Watmuff J.H.W.. Experimental and numerical study of a turbulent boundary layer with pressure gradients. J. Fluid Mech., 1993, v. 249, pp. 337-371.
  22. Турбулентные сдвиговые течения. (перев. с англ. под ред. А.С. Гиневского). М., Машиностроение, 1982.
  23. Ферцигер Дж.Х. Численное моделирование крупных вихрей для расчета турбулентных течений. Ракетн. техн. и космонавтика 1977, т. 15, № 9, с. 56-66.
  24. Rodi W., Ferziger J.H., Breuer M., Pourquie M. Status of large-eddy-simulation results of workshop. Journal of Fluids Engineering, 1997, v. 119(2), pp. 248-262.
  25. Spalart P.R., Jou W.H., Strelets M. and Allmaras S.R. Comments on the feasibility of LES for wings and on a hybrid RANS/LES approach. In Liu C. and Liu Z. (eds) Advances in DNS/LES, Proceedings of 1<sup>st</sup> AFOSR International Conference on DNS/LES, Ruston, LA, August, 4-8, Greyden Press, Columbus, OH, 1997. p. 137-147.
  26. Breuer M., Jovicic N. and Mazaev K. Comparison of DES, RANS and LES for the separated flow around a flat plate at high incidence. – Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2003, v. 41, pp. 357-388.



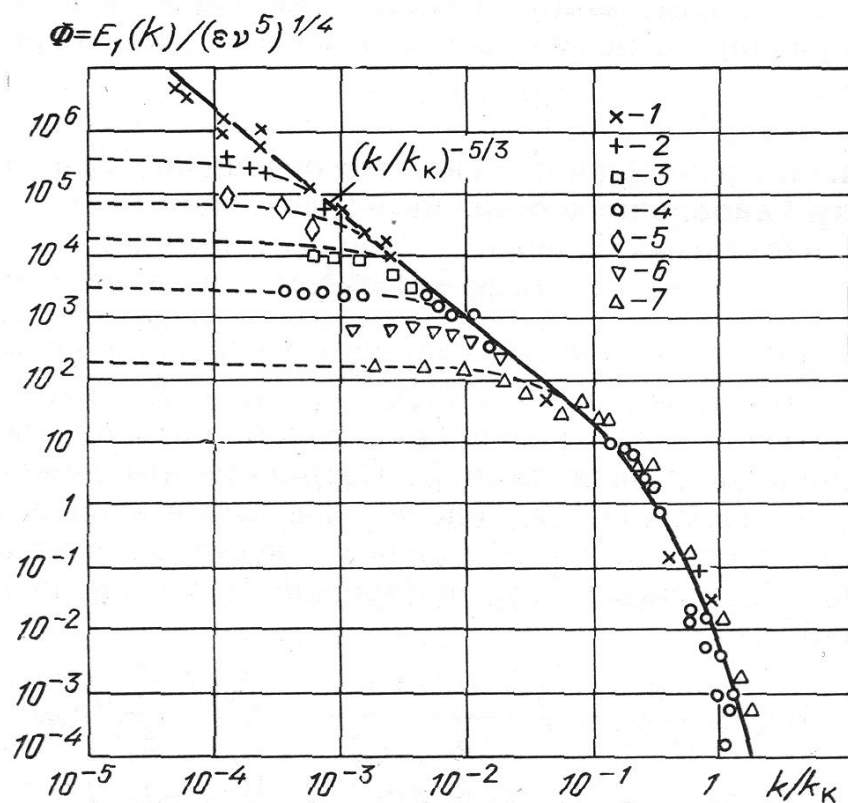


Рис. 1. Спектры энергии пульсаций продольных составляющих скорости для различных течений: 1 –приливно-отливной канал; 2 –круглая струя; 3 – течение в трубе; 4 – течение с продольным сдвигом; 5 – след за цилиндром; 6 – турбулентность за сеткой; 7 – пограничный слой.

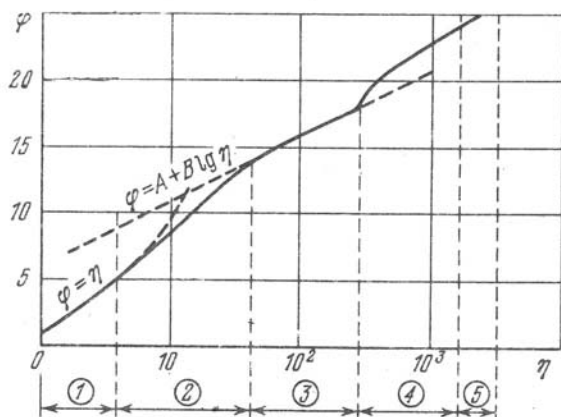


Рис. 2. Структура турбулентного пограничного слоя.