

Упражнения по курсу «Моделирование турбулентности»

Оглавление

1. Вывод уравнений линейной устойчивости.....	2
Несжимаемая жидкость.....	2
Сжимаемый газ.....	4
2. Вывод уравнений Рейнольдса и уравнений для рейнольдсовых напряжений.....	7
Условия Рейнольдса.....	7
Несжимаемая жидкость.....	8
Сжимаемый газ.....	11
3. Калибровка констант моделей турбулентности.....	15
Основные закономерности.....	15
Алгебраические модели для пристенных течений.....	16
Модели типа k-ε.....	17
Модель Ментера.....	18
Модель Спаларта-Аллмареса.....	20

1. Вывод уравнений линейной устойчивости

Несжимаемая жидкость

Обозначим через $\mathbf{q} = \{p, u, v\}^T$ вектор основных переменных двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости (p – давление, (u, v) – проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат (x, y)). Пусть далее $\bar{\mathbf{q}} = \{\bar{p}, \bar{u}, \bar{v}\}^T$ представляет собой стационарное решение этих уравнений. Тогда $\bar{\mathbf{q}}$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(\bar{u}^2 + \bar{p}/\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right), \\ \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}^2 + \bar{p}/\rho)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right), \end{array} \right. \quad (1.1)$$

где ν – кинематическая вязкость, ρ – плотность жидкости.

Рассмотрим далее систему *нестационарных* двумерных уравнений Навье-Стокса.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 + p/\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2 + p/\rho)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Представим решение системы (1.2) $\mathbf{q} = \{p, u, v\}^T$ в малой окрестности стационарного решения $\bar{\mathbf{q}}$ системы (1.1) в виде суммы $\bar{\mathbf{q}}$ и малых возмущений \mathbf{q}' :

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}(x, y) + \mathbf{q}'(x, y, t). \quad (1.3)$$

Подставляя разложение (1.3) в систему (1.2) с учетом того, что $\bar{\mathbf{q}}$ удовлетворяет системе (1.1), а также используя допущение о малости возмущений \mathbf{q}' , то есть пренебрегая нелинейными относительно \mathbf{q}' членами, получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений относительно возмущений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial(2\bar{u}u' + p'/\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}v' + u'\bar{v})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu \frac{\partial u'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right), \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}v' + u'\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(2\bar{v}v' + p'/\rho)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\nu \frac{\partial v'}{\partial y} \right), \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Поскольку коэффициенты уравнения (1.4) не зависят от t , нестационарное возмущение $\mathbf{q}'(x, y, t)$ может быть представлено в следующей гармонической форме:

$$\begin{cases} p' = \tilde{p} \cdot \exp(-i\omega t) \\ u' = \tilde{u} \cdot \exp(-i\omega t) \\ v' = \tilde{v} \cdot \exp(-i\omega t) \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь вектор $\tilde{\mathbf{q}} = \{\tilde{p}, \tilde{u}, \tilde{v}\}^T$ представляет собой комплексный вектор амплитуд возмущений в плоскости (x, y) , ω - комплексная частота возмущений, а i - мнимая единица.

Подстановка выражений для возмущений (1.5) в систему уравнений (1.4) позволяет получить следующую систему уравнений для возмущений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \\ -i\omega \tilde{u} + \frac{\partial(2\tilde{u}\tilde{u} + \tilde{p}/\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{u}\tilde{v})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2\nu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \right), \\ -i\omega \tilde{v} + \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{u}\tilde{v})}{\partial x} + \frac{\partial(2\tilde{v}\tilde{v} + \tilde{p}/\rho)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\nu \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right), \end{cases} \quad (1.6)$$

Система уравнений (1.6) может быть представлена в следующей операторной форме:

$$-i\omega W \cdot \tilde{\mathbf{q}} + M(\bar{\mathbf{q}}, \beta) \cdot \tilde{\mathbf{q}} = 0, \quad (1.7)$$

где матрица W и дифференциальный оператор M зависят только от базового стационарного решения (не зависят от вектора амплитуд возмущений). Система уравнений (1.7) представляет собой обобщенную задачу на собственные значения для линейного дифференциального оператора. Перед решением эта система должна быть дополнена аналогичным образом линеаризованными граничными условиями.

Сжимаемый газ

Обозначим через вектор $\mathbf{q} = \{\rho, u, v, T\}^T$ вектор основных переменных двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа (ρ – плотность, (u, v) – проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат (x, y) , T – температура). Пусть далее $\bar{\mathbf{q}} = \{\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{T}\}^T$ представляет собой стационарное решение этих уравнений. Тогда $\bar{\mathbf{q}}$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\bar{\rho}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}v)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(\bar{\rho}u^2 + \bar{\rho}R\bar{T})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}uv)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\tau}_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\tau}_{xy}), \\ \frac{\partial(\bar{\rho}uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}v^2 + \bar{\rho}R\bar{T})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\tau}_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\tau}_{yy}), \\ \frac{\partial(\bar{\rho}u C_p \bar{T} + 0.5\bar{\rho}u(\bar{u}^2 + \bar{v}^2))}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}v C_p \bar{T} + 0.5\bar{\rho}v(\bar{u}^2 + \bar{v}^2))}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{\tau}_{xx} + \bar{v}\bar{\tau}_{xy} + \bar{q}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{\tau}_{xy} + \bar{v}\bar{\tau}_{yy} + \bar{q}_y). \end{array} \right. \quad (1.8)$$

При записи этой системы предполагается, что удельная теплоемкость при постоянном давлении C_p является постоянной и что рассматриваемый газ является совершенным, то есть для него выполняется уравнение состояния Клапейрона - Менделеева

$$\bar{p} = \bar{\rho}R\bar{T}/m, \quad (1.9)$$

где \bar{p} - давление, R - универсальная газовая постоянная, а m – молярная масса газа.

Компоненты тензора напряжений $\bar{\tau}_{ij}$ и вектора плотности теплового потока \bar{q}_i , входящие в систему (1.8), определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xx} &= 2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3}\bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right), & \bar{\tau}_{xy} &= \bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right), & \bar{\tau}_{yy} &= 2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{2}{3}\bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right), \\ \bar{q}_x &= -\left(\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right), & \bar{q}_y &= -\left(\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

где коэффициенты вязкости и теплопроводности зависят от температуры

$$\bar{\mu} = \mu(\bar{T}), \quad \bar{\lambda} = C_p \left(\frac{\mu(\bar{T})}{Pr} \right), \quad (1.11)$$

а Pr – молекулярное число Прандтля (обычно 0.72).

Рассмотрим далее систему *нестационарных* двумерных уравнений Навье-Стокса.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + \rho RT)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy}), \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + \rho RT)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}), \\ \frac{\partial(\rho C_v T + 0.5\rho(u^2 + v^2))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u C_p T + 0.5\rho u(u^2 + v^2))}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v C_p T + 0.5\rho v(u^2 + v^2))}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right). \end{array} \right. \quad (1.12)$$

где $C_v = (C_p - R/m)$ – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, а компоненты тензора напряжений определяются соотношениями:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1.13)$$

Представим решение системы (2.5) $\mathbf{q} = \{\rho, u, v, T\}^T$ в малой окрестности стационарного решения $\bar{\mathbf{q}}$ системы (1.8) в виде суммы $\bar{\mathbf{q}}$ и малых возмущений \mathbf{q}' :

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}(x, y) + \mathbf{q}'(x, y, t). \quad (1.14)$$

Подставляя разложение (1.14) в систему (1.12) с учетом того, что $\bar{\mathbf{q}}$ удовлетворяет системе (1.8), а также используя допущение о малости возмущений \mathbf{q}' , то есть пренебрегая нелинейными относительно \mathbf{q}' членами, получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений относительно возмущений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}u' + \rho'\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}v' + \rho'\bar{v})}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(\bar{\rho}u' + \rho'\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho'\bar{u}^2 + 2\bar{\rho}u'u' + \bar{\rho}RT' + \rho'RT)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}u'v' + \bar{\rho}u'\bar{v}' + \rho'\bar{u}\bar{v}')}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\tau'_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau'_{xy}) \\ \frac{\partial(\bar{\rho}v' + \rho'\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}uv' + \bar{\rho}u'\bar{v}' + \rho'\bar{u}\bar{v}')}{\partial x} + \frac{\partial(\rho'\bar{v}^2 + 2\bar{\rho}v'v' + \bar{\rho}RT' + \rho'RT)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\tau'_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau'_{yy}) \\ \frac{\partial(\rho'(C_v\bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)) + \bar{\rho}(C_v T' + \bar{u}u' + \bar{v}v'))}{\partial t} + \\ + \frac{\partial((\bar{\rho}u' + \rho'\bar{u})(C_p\bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)) + \bar{\rho}u(C_p T' + \bar{u}u' + \bar{v}v'))}{\partial x} + \\ + \frac{\partial((\bar{\rho}v' + \rho'\bar{v})(C_p\bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)) + \bar{\rho}v(C_p T' + \bar{u}u' + \bar{v}v'))}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(u'\bar{\tau}_{xx} + v'\bar{\tau}_{xy} + \bar{u}\tau'_{xx} + \bar{v}\tau'_{xy} + \bar{\lambda} \frac{\partial T'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u'\bar{\tau}_{xy} + v'\bar{\tau}_{yy} + \bar{u}\tau'_{xy} + \bar{v}\tau'_{yy} + \bar{\lambda} \frac{\partial T'}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (1.15)$$

где

$$\tau'_{xx} = \bar{\mu} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v'}{\partial y} \right), \tau'_{xy} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right), \tau'_{yy} = \bar{\mu} \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial v'}{\partial y} \right). \quad (1.16)$$

Поскольку коэффициенты уравнения (1.15) не зависят от t , нестационарное возмущение $\mathbf{q}'(x, y, t)$ может быть представлено в следующей гармонической форме:

$$\begin{cases} \rho' = \tilde{\rho} \cdot \exp(-i\omega t) \\ u' = \tilde{u} \cdot \exp(-i\omega t) \\ v' = \tilde{v} \cdot \exp(-i\omega t) \\ T' = \tilde{T} \cdot \exp(-i\omega t) \end{cases} \quad (1.17)$$

Здесь вектор $\tilde{\mathbf{q}} = \{\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{T}\}^T$ представляет собой комплексный вектор амплитуд возмущений в плоскости (x, y) , ω - комплексная частота возмущений, а i - мнимая единица.

Подстановка выражений для возмущений (1.17) в систему уравнений (1.15) с учетом (1.16) позволяет получить следующую систему уравнений для возмущений:

$$\begin{cases} -i\omega\tilde{\rho} + \partial(\tilde{\rho}\tilde{u} + \tilde{\rho}\tilde{u})/\partial x + \partial(\tilde{\rho}\tilde{v} + \tilde{\rho}\tilde{v})/\partial y = 0 \\ -i\omega(\tilde{\rho}\tilde{u} + \tilde{\rho}\tilde{u}) + \partial(\tilde{\rho}(\tilde{u}^2 + R\tilde{T}) + 2\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{u} + \tilde{\rho}R\tilde{T})/\partial x + \partial(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v})/\partial y = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \right) \\ -i\omega(\tilde{\rho}\tilde{v} + \tilde{\rho}\tilde{v}) + \partial(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v})/\partial x + \partial(\tilde{\rho}(\tilde{v}^2 + R\tilde{T}) + 2\tilde{\rho}\tilde{v}\tilde{v} + \tilde{\rho}R\tilde{T})/\partial y = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \right) \\ -i\omega(\tilde{\rho}(C_p\tilde{T} + 0.5(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2))) + \tilde{\rho}(C_p\tilde{T} + \tilde{u}\tilde{u} + \tilde{v}\tilde{v}) + \\ + \partial((\tilde{\rho}\tilde{u} + \tilde{\rho}\tilde{u})(C_p\tilde{T} + 0.5(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2))) + \tilde{\rho}\tilde{u}(C_p\tilde{T} + \tilde{u}\tilde{u} + \tilde{v}\tilde{v})/\partial x + \\ + \partial((\tilde{\rho}\tilde{v} + \tilde{\rho}\tilde{v})(C_p\tilde{T} + 0.5(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2))) + \tilde{\rho}\tilde{v}(C_p\tilde{T} + \tilde{u}\tilde{u} + \tilde{v}\tilde{v})/\partial y = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{\mu}\tilde{u} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) + \bar{\mu}\tilde{v} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) + \tilde{u}\tilde{\tau}_{xx} + \tilde{v}\tilde{\tau}_{xy} + \bar{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{\mu}\tilde{u} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) + \bar{\mu}\tilde{v} \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) + \tilde{u}\tilde{\tau}_{xy} + \tilde{v}\tilde{\tau}_{yy} + \bar{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right] \end{cases}, \quad (1.18)$$

Система уравнений (1.18) может быть представлена в следующей операторной форме:

$$-i\omega W \cdot \tilde{\mathbf{q}} + M(\bar{\mathbf{q}}, \beta) \cdot \tilde{\mathbf{q}} = 0, \quad (1.19)$$

где матрица W и дифференциальный оператор M зависят только от базового стационарного решения (не зависят от вектора амплитуд возмущений). Система уравнений (1.19) представляет собой обобщенную задачу на собственные значения для линейного дифференциального оператора. Перед решением эта система должна быть дополнена аналогичным образом линеаризованными граничными условиями.

2. Вывод уравнений Рейнольдса и уравнений для рейнольдсовых напряжений

Условия Рейнольдса

Основные условия

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g} \quad (2.1)$$

$$\overline{af} = a\overline{f} \quad (2.2)$$

$$\overline{a} = a \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial s} = \overline{\frac{\partial f}{\partial s}} \quad (2.4)$$

$$\overline{\overline{fg}} = \overline{f} \overline{g} \quad (2.5)$$

Следствия

$$g=1 \Rightarrow \begin{cases} \overline{\overline{fg}} & \stackrel{(2)}{=} \overline{gf} = \overline{f} \stackrel{(5)}{\Rightarrow} \overline{\overline{f}} = \overline{f} \\ \overline{\overline{fg}} & \stackrel{(3)}{=} \overline{gf} = \overline{f} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\overline{f} = \overline{\overline{f + f'}} \stackrel{(1)}{=} \overline{\overline{f}} + \overline{f'} \stackrel{(6)}{=} \overline{\overline{f}} + \overline{f'} \Rightarrow \overline{f'} = 0 \quad (2.7)$$

$$\overline{\overline{fg}} \stackrel{(5)}{=} \overline{\overline{fg}} \stackrel{(6)}{=} \overline{\overline{fg}} \Rightarrow \overline{\overline{\overline{fg}}} = \overline{\overline{fg}} \quad (2.8)$$

$$\overline{\overline{fg}} \stackrel{(5)}{=} \overline{\overline{fg}} = \overline{\overline{f(g + g')}} \stackrel{(1)}{=} \overline{\overline{fg}} + \overline{\overline{fg'}} \stackrel{(7)}{=} \overline{\overline{fg}} + \overline{\overline{fg'}} \Rightarrow \overline{\overline{fg'}} = 0 \quad (2.9)$$

$$\overline{fg} = \overline{(f + f')(g + g')} = \overline{\overline{fg}} + \overline{\overline{fg'}} + \overline{f'g} + \overline{f'g'} \stackrel{(8),(9)}{=} \overline{\overline{fg}} + \overline{\overline{fg'}} \Rightarrow \overline{fg} = \overline{\overline{fg}} + \overline{\overline{fg'}} \quad (2.10)$$

Несжимаемая жидкость

Уравнения Навье-Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{ji}}{\partial x_j} \end{cases} \quad (2.11)$$

где

$$t_{ij} = 2\mu S_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Используя уравнение неразрывности, конвективные и вязкие слагаемые можно записать в другом виде

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial t_{ji}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

В частности, можно получить уравнение движения в консервативной форме:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.12)$$

Уравнения Рейнольдса

Разложение на осредненную и пульсационную составляющие

$$u_i = \overline{u_i} + u'_i = U_i + u'_i \quad (2.13)$$

Подстановка (2.13) в (2.12), применение процедуры осреднения, с учетом (2.4) и (2.10) дает

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial (U_i U_j + \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu S_{ij})$$

Более привычная форма уравнений Рейнольдса выглядит как

$$\begin{cases} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial (U_i U_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right) \end{cases} \quad (2.14)$$

С учетом гипотезы Буссинеска

$$-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_T \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.15)$$

получается

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho (v + v_T) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \end{cases} \quad (2.16)$$

Важно, что в этом уравнении используется модифицированное давление

$$\tilde{p} = p + \frac{2}{3} \rho k \quad (2.17)$$

Уравнения для рейнولدсовых напряжений

Уравнения для пульсаций скорости (получается вычитанием (2.12) из (2.14)):

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial (U_i u'_j + u'_i U_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - u'_i u'_j + \overline{u'_i u'_j} \right) \quad (2.18)$$

Аналогичное уравнение можно записать для u_n

$$\frac{\partial u'_n}{\partial t} + \frac{\partial (U_n u'_j + u'_n U_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial u'_n}{\partial x_j} - u'_n u'_j + \overline{u'_n u'_j} \right) \quad (2.19)$$

Сумма уравнения (2.18), умноженного на u'_n , и уравнения (2.19), умноженного на u'_i , после осреднения по Рейнольдсу дает уравнение для напряжений Рейнольдса. При его получении были учтены следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_n U_j) = U_j \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_n) - \text{из неразрывности для осредненного движения};$$

$$u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_n u'_j) + u'_n \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_n u'_j) - \text{из неразрывности для пульсаций}.$$

Кроме того вязкое слагаемое и слагаемое с давлением необходимо продифференцировать по частям.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u'_i u'_n}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \overline{u'_i u'_n}}{\partial x_j} = & - \left(\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_n}{\partial x_j} + \overline{u'_n u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_n}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_n} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial \overline{u'_i u'_n}}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_n u'_j} - \frac{\delta_{ij}}{\rho} \overline{u'_n p'} - \frac{\delta_{nj}}{\rho} \overline{u'_i p'} \right) - 2v \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_n}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Слагаемые в правой части (2.20) принято записывать следующим образом

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} D_{ijk} + P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}$$

$$D_{ijk} = v \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j} - \overline{u'_i u'_j u'_k} - \frac{1}{\rho} (\delta_{ik} \overline{u'_j p'} + \delta_{jk} \overline{u'_i p'}) - \text{диффузия}$$

$$P_{ij} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \text{генерация}$$

$$\Phi_{ij} = \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) - \text{корреляция давление – скорость деформации}$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} - \text{диссипация}$$

Уравнение для кинетической энергии турбулентности

Половина следа уравнения (2.20) приводит к уравнению для кинетической энергии турбулентности

$$k = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \overline{u'_j \left(\frac{u'_i u'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} \right) - \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad (2.21)$$

или

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} + D_j \right) - \varepsilon$$

$$P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \text{генерация}$$

$$D_j = -\overline{u'_j \left(\frac{u'_i u'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} - \text{диффузия}$$

$$\varepsilon = -\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} - \text{диссипация}$$

Сжимаемый газ

Уравнения Навье-Стокса

Уравнения Навье-Стокса в консервативной форме

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} H) = \nabla \cdot [\vec{u} \cdot \boldsymbol{\tau} + \vec{q}] \\ \rho = pm/(RT) \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Здесь \vec{u} - вектор скорости осредненного течения с компонентами u , v и w , $E = e + 0.5(u^2 + v^2 + w^2) = C_v T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)$ - полная энергия газа, $H = E + p/\rho = h + 0.5(u^2 + v^2 + w^2) = C_p T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)$ - его полная энтальпия, T - температура, $C_v = (C_p - R/m)$ - удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, C_p - удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, $R = 8.31434$ Дж/(моль·К) - универсальная газовая постоянная, а m - молярная масса газа.

Величины тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}$ и вектора плотности теплового потока \vec{q} в (2.22) определяются соответственно с помощью реологического закона Ньютона и закона Фурье

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu(T) \left(\mathbf{S} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \vec{u} \right), \quad \vec{q} = -\lambda(T) \nabla T \quad (2.23)$$

где $\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + [\nabla \vec{u}]^t)$ - тензор скоростей деформаций, \mathbf{I} - единичный тензор, а $\mu(T)$ и $\lambda(T)$ - коэффициенты молекулярной динамической вязкости и теплопроводности.

В двумерном случае (2.23) может быть записано как

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Коэффициент теплопроводности может быть выражен через коэффициент вязкости и число Прандтля (аналогия Рейнольдса)

$$\lambda = \frac{C_p \mu}{Pr}, \quad (2.24)$$

Типичное значение $Pr \approx 0.72$

Осреднение по Фавру

Не привносит дополнительного физического смысла, а просто удобное математическое упрощение

$$\tilde{a}(t) = \frac{\overline{\rho a}}{\rho} \quad (2.25)$$

Свойства

$$\begin{aligned} a &= \tilde{a} + a'' \\ \overline{\rho a''} &= 0 \\ \overline{a''} &= -\frac{\overline{\rho' a'}}{\rho} \neq 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Уравнения Рейнольдса

Для получения осредненных уравнений разложим переменные на осредненную и пульсационную составляющие

$$\left\{ \begin{aligned} u_i &= \tilde{u}_i + u_i'' \\ \rho &= \bar{\rho} + \rho' \\ p &= P + p' \\ h &= \tilde{h} + h'' \\ e &= \tilde{e} + e'' \\ T &= \tilde{T} + T'' \\ q_i &= \bar{q}_i + q_i' \end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

Подстановка (2.27) в (2.22) и осреднение по Рейнольдсу приводит к

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) &= 0 \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\tau}_{ji} - \overline{\rho u_i'' u_j''}] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \left(\tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\rho} \tilde{u}_j \left(\tilde{h} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \tilde{u}_j \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2} \right] &= \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{q}_j - \overline{\rho u_j'' h''} + \bar{\tau}_{ji} u_i'' - \frac{\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tilde{u}_i (\bar{\tau}_{ji} - \overline{\rho u_i'' u_j''}) \right] \\ \bar{\rho} &= Pm / (R\tilde{T}) \end{aligned} \right. \quad (2.28)$$

Введем

$$\begin{aligned} \tau_{t,ij} &= -\overline{\rho u_i'' u_j''} \\ q_{t,i} &= -\overline{\rho u_i'' h''} \end{aligned}$$

$$k = \frac{1}{\rho} \frac{\tau_{t,ii}}{2} = \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2\rho}$$

Система (2.28) может быть переписана в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) = 0 \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\tau}_{ji} + \overline{\tau_{t,ji}}] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \left(\tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \bar{\rho} k \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\rho} \tilde{u}_j \left(\tilde{h} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \bar{\rho} \tilde{u}_j k \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{q}_j + \overline{q_{t,j}} + \tau_{ji} u_i'' - \frac{\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\tilde{u}_i (\bar{\tau}_{ji} + \overline{\tau_{t,ji}}) \right] \\ \bar{\rho} = Pm / (R\tilde{T}) \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Слагаемое $\tau_{ji} u_i'' - \frac{\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}}{2}$ - молекулярная и турбулентная диффузия кинетической энергии турбулентности.

На практике использую уравнение энергии без учета кинетической энергии турбулентности – полный аналог последнего уравнения в (2.22)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \left(\tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\bar{\rho} \tilde{u}_j \left(\tilde{h} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{q}_j + \overline{q_{t,j}}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [\tilde{u}_i (\bar{\tau}_{ji} + \overline{\tau_{t,ji}})] \quad (2.30)$$

Система уравнений Рейнольдса является незамкнутой, поскольку связь между турбулентными составляющими тензора напряжений τ_t и вектора плотности теплового потока \bar{q}_t с параметрами осредненного течения, являющимися основными переменными этой системы, неизвестна и должна быть определена с помощью дополнительных соотношений, которые собственно и составляют *модель турбулентности*.

В случае использования так называемых линейных моделей турбулентности предполагается, что справедливы так называемые обобщенная гипотеза Буссинеска и закон Фурье

$$\tau_t = 2\mu_t \left(\mathbf{S} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right) + \frac{2}{3} k \mathbf{I}, \quad \bar{q}_t = -\lambda_t \nabla T, \quad (2.31)$$

где μ_t - турбулентная вязкость, $k = 1/2(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$ - кинетическая энергия турбулентности, а λ_t - турбулентная теплопроводность, часто выражаемая при помощи соотношения (аналогия Рейнольдса)

$$\lambda_t = \frac{C_p \mu_t}{Pr_t}, \quad (2.32)$$

где Pr_t - турбулентный аналог числа Прандтля, обычно полагаемый равным константе ($Pr_t = 0.9$).

Уравнения для кинетической энергии турбулентности

Уравнение для кинетической энергии турбулентности можно получить разными способами. Например: уравнение движения (2.22) в неконсервативной форме умножить на u_i'' и осреднить по Рейнольдсу

$$\overline{\rho u_i'' \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{\rho u_i'' u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\overline{u_i'' \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i'' \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}} \quad (2.33)$$

Используя (2.26), (2.27) и дифференцирование по частям можно преобразовать слагаемые, входящие в (2.33)

$$\overline{\rho u_i'' \frac{\partial u_i}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{\rho k}}{\partial t} - \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i'' \frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (2.34)$$

$$\overline{\rho u_i'' u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\tau_{t,ji} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho \tilde{u}_j k} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''} \right) - \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i'' \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}} \quad (2.35)$$

$$\overline{u_i'' \frac{\partial p}{\partial x_i}} = \overline{u_i'' \frac{\partial P}{\partial x_i}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{p' u_i''} \right) - p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i} \quad (2.36)$$

$$\overline{u_i'' \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\tau_{ji} u_i''} \right) - \tau_{ji} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \quad (2.37)$$

Подстановка (2.34)-(2.37) в (2.33) с учетом уравнения неразрывности приводит к уравнению для кинетической энергии турбулентности

$$\overline{\rho \frac{\partial k}{\partial t}} + \overline{\rho \tilde{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j}} = \tau_{t,ji} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \tau_{ji} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\tau_{ji} u_i''} - \frac{1}{2} \overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''} - p' u_i'' \right) - \overline{u_i'' \frac{\partial P}{\partial x_i}} + p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}$$

Последние два слагаемых, называемых *работа давления* и *давление-растяжение*, характеризуют влияние сжимаемости на турбулентность и пропадают в несжимаемом случае.

Уравнения для рейнольдсовых напряжений

Эти уравнения могут быть получены тем же путем, как и для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \tau_{t,ij}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_j \tau_{t,ij}}{\partial x_j} = -\tau_{t,ik} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{t,jk} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \varepsilon_{ij} - \Phi_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\left(\overline{\tau_{kj} u_i''} + \overline{\tau_{ki} u_j''} \right) + D_{ijk} \right) + \overline{u_i'' \frac{\partial P}{\partial x_j}} + \overline{u_j'' \frac{\partial P}{\partial x_i}} \quad (2.38)$$

$$P_{ij} = -\tau_{t,ik} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{t,jk} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \text{ - генерация}$$

$$\Phi_{ij} = p' \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \right) \text{ - корреляция давление-скорость деформации}$$

$$\varepsilon_{ij} = \tau_{kj} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} + \tau_{ki} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} \text{ - диссипация}$$

$$D_{ijk} = \overline{\rho u_j'' u_i'' u_k''} - p' u_i'' \delta_{jk} - p' u_j'' \delta_{ik} \text{ - турбулентная диффузия}$$

3. Калибровка констант моделей турбулентности

Основные закономерности

Как следует из их названия, полуэмпирические модели турбулентности должны опираться на свойства течений, наблюдаемые в эксперименте. В настоящем разделе рассмотрены соображения, лежащие в основе калибровки наиболее известных моделей турбулентности. Рассматривается три течения.

Вырождение однородной изотропной турбулентности

Экспериментальные исследования показывают, что затухание кинетической энергии турбулентности происходит со скоростью $k \sim t^{-1.2}$.

Развитие турбулентности в поле однородного сдвига

Для этого течения характерен экспоненциальный рост турбулентных напряжений $k \sim \exp(CSt)$, где значение константы C лежит в пределах 0.1-0.16.

Логарифмическая область пограничного слоя

Вывод автомодельных соотношений базируется на 4 предположениях (выполняющихся на практике с определенной степенью точности). Поэтому и автомодельное поведение турбулентных характеристик весьма приближенно.

1. Логарифмический профиль скорости

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(E \frac{yv_*}{v} \right) \quad (3.1)$$

2. Формула Колмогорова

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.2)$$

3. Постоянство касательного напряжения

$$\rho v_*^2 = \tau_w = \tau = \rho(v + v_t) \frac{\partial u}{\partial y} \approx \rho v_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.3)$$

4. Гипотеза о локальном равновесии генерации и диссипации кинетической энергии турбулентности

$$P_k = v_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \approx \varepsilon \quad (3.4)$$

При помощи несложных преобразований из (3.1) – (3.4) можно получить

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{v_*}{\kappa y} \quad (3.5)$$

$$k = \frac{v_*^2}{C_\mu^{0.5}} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon = \frac{v_*^3}{\kappa y} \quad (3.7)$$

$$\omega = \frac{v_*}{C_\mu^{0.5} \kappa y} \quad (3.8)$$

$$v_t = \kappa v_* \quad (3.9)$$

Алгебраические модели для пристенных течений

Закон стенки

Рассмотрим пограничный слой на плоской пластине.

В терминах гипотезы Прандтля для внутренней области длина пути перемешивания пропорциональна расстоянию до стенки $l_{mix} = \kappa y$.

Так из эксперимента известно, что во внутренней области полное касательное напряжение почти постоянно $\tau = (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} = const$.

Поскольку при достаточно высоких числах Рейнольдса, начиная с некоторого расстояния от стенки, интенсивность турбулентного переноса значительно превышает интенсивность молекулярного, получим

$$\rho v_*^2 = \tau_w = \tau \approx \rho v_t \frac{\partial u}{\partial y} = \rho l_{mix}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \rho \left(\kappa y \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

Перейдя к переменным закона стенки $y^+ = \frac{y v_*}{\nu}$, $u^+ = \frac{u}{v_*}$ получим

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = 1/\kappa y^+$$

откуда непосредственно следует логарифмический закон стенки

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$$

Таким образом, для выполнения закона стенки линейный масштаб должен быть равен $l_{mix} = \kappa y$.

Демпфирующий множитель

В непосредственной близости стенки характерный размер энергонесущих вихрей настолько мал, что существенной становится вязкая диссипация. Для учета этого обстоятельства используется так называемый демпфирующий множитель

$$v_t = l_{mix}^2 D \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, l_{mix} = \kappa y.$$

Демпфирующий множитель должен удовлетворять следующим условиям (теория демпфирующих множителей Лойцянского).

1. Демпфирующий множитель D должен обеспечивать правильное (соответствующее эксперименту) поведение турбулентной вязкости вблизи стенки, $v_{Ti}/\nu|_{y \rightarrow 0} = \alpha (y^+)^4$ ($\alpha = 0.0092 \div 0.0125$).

2. Демпфирующий множитель D должен расти при удалении от стенки (асимптотически приближаясь к 1) и практически обращаться в единицу при $y^+ > 30 \div 60$.

3. Демпфирующий множитель D должен удовлетворять соотношению:

$$B = \lim_{y^+ \rightarrow \infty} \left[\int_0^{y^+} \frac{\partial u^+}{\partial y^+} (D) dy^+ - \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) \right],$$

где B – константа в логарифмическом законе

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B$$

Всем этим условиям удовлетворяет демпфирующий множитель, предложенный в 1956 году Ван-Дристом $D = (1 - \exp(-y v_*^+ / A v))^2$, $A = 26$.

Модели типа k - ε

Рассмотрим уравнения «стандартной» k - ε модели

$$\frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot \left(\left(v + \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \varepsilon$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \nabla \cdot \left(\left(v + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Вырождение однородной изотропной турбулентности

Уравнения преобразуются к виду.

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} = -\varepsilon \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = -C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \end{cases}$$

Переменные можно разделить

$$\frac{d(\varepsilon/k)}{dt} = -(C_2 - 1) \left(\frac{\varepsilon}{k} \right)^2$$

С учетом начальных условий

$$\begin{cases} k|_{t=0} = k_0 \\ \varepsilon|_{t=0} = \varepsilon_0 \end{cases}$$

решение этого уравнения имеет вид

$$\varepsilon = \frac{k}{(C_2 - 1)t + k_0/\varepsilon_0}$$

Итоговое решение

$$\begin{cases} k = k_0 (\varepsilon_0/k_0 (C_2 - 1)t + 1)^{-\frac{1}{C_2 - 1}} \\ \varepsilon = \varepsilon_0 (\varepsilon_0/k_0 (C_2 - 1)t + 1)^{-\frac{C_2}{C_2 - 1}} \end{cases}$$

Экспериментальная зависимость $k \sim t^{-\frac{6}{5}}$ приводит к константе $C_2=1.83$. Однако, из соображений компромисса с задачей о развитии турбулентности в поле однородного сдвига в «стандартной» модели $C_2=1.92$.

Логарифмическая область пограничного слоя

Рассмотрим логарифмический участок профиля скорости в установившемся течении в канале.

$$\begin{cases} v_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) = 0 \\ C_1 \frac{\varepsilon}{k} v_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

Подстановка выражений $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{v_*}{\kappa y}$, $k = \frac{v_*^2}{C_\mu^{0.5}}$, $\varepsilon = \frac{v_*^3}{\kappa y}$, $v_t = \kappa v_*$ приводит к соотношению

$$C_2 = C_1 - \frac{\kappa^2}{\sigma_\varepsilon \sqrt{C_\mu}}$$

Модель Менгера

Вывод уравнений для k - ω из k - ε

$$\frac{Dk}{Dt} = \nabla \cdot \left(\left(v + \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \varepsilon \quad (3.8)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \nabla \cdot \left(\left(v + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.9)$$

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$P_k = v_T S^2 = -\tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

$$\omega = \frac{\varepsilon}{C_\mu k} \quad (3.10)$$

Рассмотрим выражение $[(2) \cdot k - (1) \cdot \varepsilon] / C_\mu k^2$. С учетом (3) оно может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{Dt} = & \nabla \cdot \left(\left(v + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \omega \right) + (C_1 - 1) \frac{\omega}{k} P_k - (C_2 - 1) \omega^2 + \\ & + 2 \left(v + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla k \nabla \omega + \frac{\omega}{k} \nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon} - \frac{1}{\sigma_k} \right) v_T \nabla k \right) \end{aligned}$$

Предпоследнее слагаемое (cross diffusion term) определяет различия в поведении k - ω и k - ε моделей

Вырождение однородной изотропной турбулентности

Рассмотрим k - ω модель для ДИТ

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} = -\beta^* k \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\beta \omega^2 \end{cases}$$

с использованием следующих начальных условий

$$\begin{cases} k|_{t=0} = K_0 \\ \omega|_{t=0} = \omega_0 \end{cases}$$

Эта система имеет аналитическое решение

$$\begin{cases} k = K_0 (\beta \omega_0 t + 1)^{-\frac{\beta^*}{\beta}} \\ \omega = \frac{\omega_0}{\beta \omega_0 t + 1} \end{cases}$$

Константа $\beta^* = C_\mu = 0.09$ следует из формулы Колмогорова

Зависимость $k \sim t^{-1.2}$ приводит к константе $\beta=0.075$. В k - ε ветке модели Ментера используется значение $\beta=0.0828$, соответствующее константе «стандартной» модели $C_2=1.92$.

Кстати, в ДИТ турбулентная вязкость изменяется следующим образом

$$v_t = \frac{k}{\omega} = \frac{K_0}{\omega_0} (\beta \omega_0 t + 1)^{1-\frac{\beta^*}{\beta}}$$

Логарифмическая область пограничного слоя

Рассмотрим логарифмический участок профиля скорости в установившемся течении в канале.

$$\begin{cases} v_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \beta^* k \omega + \sigma^* \frac{\partial}{\partial y} \left(v_t \frac{\partial k}{\partial y} \right) = 0 \\ \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \beta^* \omega^2 + \sigma \frac{\partial}{\partial y} \left(v_t \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

Подстановка выражений $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{v_*}{\kappa y}$, $k = \frac{v_*^2}{C_\mu^{0.5}}$, $v_t = \kappa y v_*$, $\omega = \frac{v_*}{C_\mu^{0.5} \kappa y}$ приводит к

$$\text{соотношению } \alpha = \frac{\beta^*}{C_\mu} - \frac{\sigma \kappa^2}{\sqrt{C_\mu}} = 1 - \frac{\sigma \kappa^2}{\sqrt{C_\mu}}$$

Функции F_1 и F_2

В модели используются 2 переключающие функции

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega d}, \frac{500 v}{d^2 \omega} \right), \frac{4 \sigma_{\omega 2} k}{C D_{k\omega} d^2} \right]$$

$$CD_{k\omega} = \max(D_{k\omega}, 10^{-20}), D_{k\omega} = \frac{2\sigma_{\omega^2}}{\omega} (\nabla k) \bullet (\nabla \omega)$$

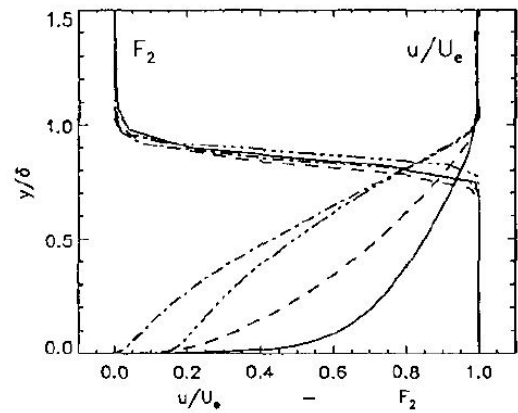
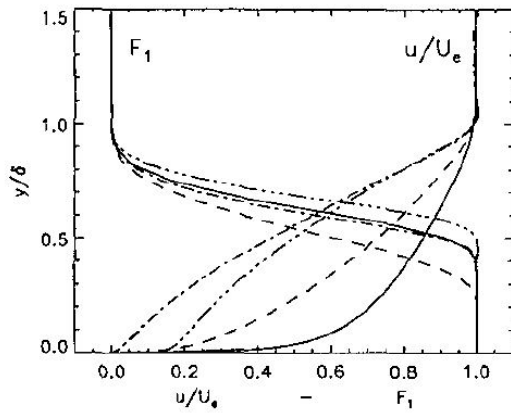
$$v_T = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)}, F_2 = \tanh(\arg_2^2), \arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega d}, \frac{500\nu}{d^2\omega}\right)$$

Они основаны на следующих соображениях.

$$\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega d} = \frac{l_t}{l} \text{ на логарифмическом участке } \frac{\sqrt{k}}{0.09\omega d} = \frac{\kappa}{C_\mu^{3/4}} \approx 2.5$$

$\frac{500\nu}{d^2\omega}$ - ограничитель, предотвращающий срабатывание в вязком подслое. На

$$\text{логарифмическом участке } \frac{500\nu}{d^2\omega} = \frac{500\kappa\sqrt{C_\mu}}{d^+} \approx \frac{60}{d^+}$$



Несмотря на похожее поведение, эти функции должны удовлетворять немного разным критериям. Функция F_1 обязательно должна стать равной 0 к внешней границе пограничного слоя. В противном случае возможно влияние граничных условий для ω . Функция F_2 должна обеспечивать значение 1 в максимально широкой части пограничного слоя. Это обуславливает разницу в их формулировке.

Модель Спаларта-Аллмареса

Генерация

Рассмотрим уравнения стандартной k - ε модели

$$\frac{Dk}{Dt} = \nabla \bullet \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \varepsilon \quad (3.11)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \nabla \bullet \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.12)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$P_k = \nu_T S^2 = -\tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

Для получения уравнения для кинетической энергии турбулентности рассмотрим выражение

$$\frac{Dv_t}{Dt} = \frac{2C_\mu k}{\varepsilon} \frac{Dk}{Dt} - \frac{C_\mu k^2}{\varepsilon^2} \frac{D\varepsilon}{Dt}$$

Генерация турбулентной вязкости

$$P_{v_t} = \frac{2C_\mu k}{\varepsilon} P_k - \frac{C_\mu k^2}{\varepsilon^2} P_\varepsilon = \left(\frac{2C_\mu k}{\varepsilon} - \frac{C_\mu k^2}{\varepsilon^2} C_1 \frac{\varepsilon}{k} \right) P_k = \frac{(2-C_1)}{\omega} P_k = \frac{(2-C_1)}{\omega} v_T S^2$$

Поскольку в сдвиговых течениях $\omega \sim S$

$$P_{v_t} \sim v_T S$$

Кроме того видно, что константа C_1 в стандартной k - ε модели не может быть больше 2.

Диффузия

Рассмотрим следующий оператор

$$\begin{aligned} \nabla \bullet (v_t \nabla v_t^{1+C_{b2}}) &= \nabla \bullet (v_t (1+C_{b2}) v_t^{C_{b2}} \nabla v_t) = (1+C_{b2}) v_t^{C_{b2}} \nabla \bullet (v_t \nabla v_t) + (v_t \nabla v_t) \bullet \nabla [(1+C_{b2}) v_t^{C_{b2}}] = \\ &= (1+C_{b2}) [v_t^{C_{b2}} \nabla \bullet (v_t \nabla v_t) + (v_t \nabla v_t) \bullet C_{b2} v_t^{C_{b2}-1} \nabla v_t] = (1+C_{b2}) v_t^{C_{b2}} (\nabla \bullet (v_t \nabla v_t) + C_{b2} [(\nabla v_t) \bullet (\nabla v_t)]) \end{aligned}$$

Таким образом, диффузионный оператор модели сохраняет $v_t^{1+C_{b2}}$

$$D_{v_t} = \frac{1}{\sigma} ([\nabla \bullet (v_t \nabla v_t)] + C_{b2} [(\nabla v_t) \bullet (\nabla v_t)]) = \frac{1}{\sigma(1+C_{b2}) v_t^{C_{b2}}} \nabla \bullet (v_t \nabla v_t^{1+C_{b2}})$$

Логарифмическая область пограничного слоя

Рассмотрим логарифмический участок профиля скорости в установившемся течении в канале.

$$0 = C_{b1} \frac{\partial u}{\partial y} v_t + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(v_t \frac{\partial}{\partial y} v_t \right) + C_{b2} \left(\frac{\partial v_t}{\partial y} \right)^2 \right) - C_{w1} \left(\frac{v_t}{y} \right)^2$$

Подстановка выражений $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{v_*}{\kappa y}$, $v_t = \kappa u v_*$ приводит к соотношению

$$C_{w1} = C_{b1}/\kappa^2 + (1+C_{b2})/\sigma$$