

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт прикладной математики и механики  
Кафедра «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен»

Курс лекций «Моделирование турбулентности»  
([http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/turb\\_models](http://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/lecture/turb_models))

## Лекция 5

# Уравнения Рейнольдса

# Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations (RANS)

Гарбарук Андрей Викторович (agarbaruk@mail.ru)  
2019

# Уравнения Навье-Стокса

- Уравнения Навье-Стокса справедливы при выполнении двух условий:
  - Среда должна быть сплошной
    - ✓ (число Кнудсена  $Kn = l_f/L \ll 1$  )
  - Выполняется обобщенный реологический закон Ньютона
    - ✓  $P_{ij} = 2\mu S_{ij} - p\delta_{ij}$
- В случае несжимаемой жидкости

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \end{array} \right. \quad \text{где} \quad t_{ij} = 2\mu S_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

- Конвективные слагаемые можно записать в консервативной форме

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j}$$

- Вязкие слагаемые можно упростить

$$\frac{\partial t_{ji}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

# Условия Рейнольдса

- Уравнения Рейнольдса получаются из уравнений Навье-Стокса при помощи осреднения
  - Осреднение может проводиться различными способами
    - ✓ по ансамблю
    - ✓ по времени
    - ✓ по пространству
- Независимо от типа осреднения для получения уравнений Рейнольдса необходимо, чтобы осреднение удовлетворяло условиям Рейнольдса

$$\begin{array}{l} \overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g} \\ \overline{af} = a\overline{f} \\ \overline{a} = a \\ \overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial s} \\ \overline{fg} = \overline{f} \overline{g} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \overline{\overline{f}} = \overline{f} \\ \overline{f'} = 0 \\ \overline{\overline{fg}} = \overline{\overline{f} \overline{g}} \\ \overline{fh'} = 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \overline{fg} = \overline{f} \overline{g} + \overline{f'g'}$$

# Осреднение по Рейнольдсу (по времени)

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} a(\tau) \cdot d\tau$$

- Для удовлетворения условиям Рейнольдса период осреднения должен быть много больше максимального периода турбулентных пульсаций – времени автокорреляции
  - При рассмотрении стационарных (в среднем) течений время осреднения может быть сколь угодно большим ( $T = \infty$ )
  - В нестационарном случае период осреднения должен быть много меньше характерных времен изменения нестационарных величин
    - ✓ Не всегда возможно подобрать период  $T$  такой, чтобы выполнялись условия Рейнольдса



- Применение нестационарных уравнений Рейнольдса (URANS) не всегда обосновано
  - ✓ Тем не менее, этот подход широко распространен

# Уравнения Рейнольдса

## Вывод уравнений см. в упражнениях по курсу

- Уравнения Рейнольдса получаются в результате осреднения по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \end{cases}$$

- Отличаются от уравнений Навье-Стокса только слагаемым  $\frac{\partial}{\partial x_j} \rho \overline{u'_i u'_j}$
- Эти уравнения не замкнуты.
  - Для их замыкания необходимо определить тензор турбулентных (Рейнольдсовых) напряжений

$$\tau_{ij}^T = \rho \overline{u'_i u'_j}$$

- ✓ Симметричный
  - 6 независимых компонент

- След  $\{\tau_{ij}^T\} = \{\rho \overline{u'_i u'_j}\} = \rho \overline{u'_i u'_i} = 2K_t$

- Рейнольдсовы напряжения по форме – вязкие, по природе конвективные

# Уравнения движения сжимаемого газа

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} H) = \nabla \cdot [\vec{u} \cdot \boldsymbol{\tau} + \vec{q}] \\ \rho = pm / (RT) \end{array} \right.$$

- Полная энергия  $E = e + 0.5(u^2 + v^2 + w^2) = C_v T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)$
- Полная энтальпия  $H = E + p / \rho = h + 0.5(u^2 + v^2 + w^2) = C_p T + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)$
- Тензор вязких напряжений  $\boldsymbol{\tau} = 2\mu(T) \left( \mathbf{S} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \vec{u} \right)$ 
  - Тензор скоростей деформаций  $\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + [\nabla \vec{u}]^t)$
  - ✓ Иногда обозначают  $\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + [\nabla \vec{u}]^t) - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \vec{u}$
- Тепловой поток  $\vec{q} = -\lambda(T) \nabla T$ 
  - Аналогия Рейнольдса  $\lambda(T) = \frac{C_p \mu(T)}{\text{Pr}}$

Из-за переменной плотности эти уравнения существенно более нелинейные, чем уравнения для несжимаемой жидкости

# Осреднение по Фавру

- В сжимаемом случае осреднение по Рейнольдсу приводит к появлению корреляций плотности вида  $\overline{\rho'u'}$ 
  - Во многих случаях этими членами уравнений просто пренебрегают
    - ✓ Гипотеза Морковина: при не слишком высоких числах Маха при моделировании турбулентности можно не учитывать влияние пульсаций плотности
- Более оправданным подходом является использование взвешенного осреднения (осреднения по Фавру)

$$\tilde{a}(t) = \frac{\overline{\rho a}}{\bar{\rho}}$$

- Не приносит дополнительного физического смысла, а просто удобное математическое упрощение
- Свойства осреднения по Фавру

$$a = \tilde{a} + a''$$

$$\overline{\rho a''} = 0$$

$$\overline{\rho a} = \overline{\rho \tilde{a}} = \overline{\rho \bar{a}} + \overline{\rho' a'} \quad \Rightarrow \quad a - a'' = \tilde{a} = \bar{a} + \frac{\overline{\rho' a'}}{\bar{\rho}} \quad \Rightarrow \quad \bar{a}'' = -\frac{\overline{\rho' a'}}{\bar{\rho}} \neq 0$$

# Уравнения Рейнольдса сжимаемого газа

При получении уравнений часть переменных осредняется по Рейнольдсу

$$\begin{cases} \rho = \bar{\rho} + \rho' \\ p = P + p' \\ q_i = \bar{q}_i + q_i' \end{cases}$$

а другая часть по Фавру

$$\begin{cases} u_i = \tilde{u}_i + u_i'' \\ h = \tilde{h} + h'' \\ e = \tilde{e} + e'' \\ T = \tilde{T} + T'' \end{cases}$$

Подстановка этого разложения в уравнения сжимаемого газа и осреднение последних по Рейнольдсу дает [уравнения Рейнольдса для сжимаемого газа](#)



# Уравнения Рейнольдса для сжимаемого газа

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) = 0 \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\tau}_{ji} + \overline{\tau_{t,ji}}] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{\rho} \left( \tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \bar{\rho} k \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j \left( \tilde{h} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \bar{\rho} \tilde{u}_j k \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{q}_j + \bar{q}_{t,j} + \bar{\tau}_{ji} u_i'' - \frac{\bar{\rho} u_j'' u_i'' u_i''}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \tilde{u}_i (\bar{\tau}_{ji} + \overline{\tau_{t,ji}}) \right] \\ \bar{\rho} = Pm / (RT) \end{array} \right.$$

- Тензор турбулентных напряжений  $\tau_{t,ij} = -\overline{\rho u_i'' u_j''}$
- Турбулентный тепловой поток  $q_{t,i} = -\overline{\rho u_i'' h''}$
- Отличия исходных и полученных уравнений более существенны, чем в несжимаемом случае

➤ В уравнение энергии входят конвекция и диффузия кинетической энергии турбулентности

$$k = \frac{1}{\rho} \frac{\tau_{t,ii}}{2} = \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2\rho}$$

✓ Этими слагаемыми обычно пренебрегают

# Уравнения для рейнольдсовых напряжений (вторых одноточечных моментов)

- Эти уравнения могут быть получены из уравнений Навье-Стокса с использованием процедуры осреднения по Рейнольдсу
- В случае несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} D_{ijk} + P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}$$

➤ **Диффузия**  $D_{ijk} = \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j} - \overline{u'_i u'_j u'_k} - \frac{1}{\rho} (\delta_{ik} \overline{u'_j p'} + \delta_{jk} \overline{u'_i p'})$

- ✓ Молекулярный и турбулентный диффузионный перенос

➤ **Генерация**  $P_{ij} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$

- ✓ Получение энергии от осредненного течения

➤ **Корреляция давление-скорость деформации**  $\Phi_{ij} = \frac{p'}{\rho} \left( \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)$

- ✓ Перераспределение энергии между компонентами тензора

➤ **Диссипация**  $\varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}$

- ✓ Передача энергии в тепло за счет вязких сил

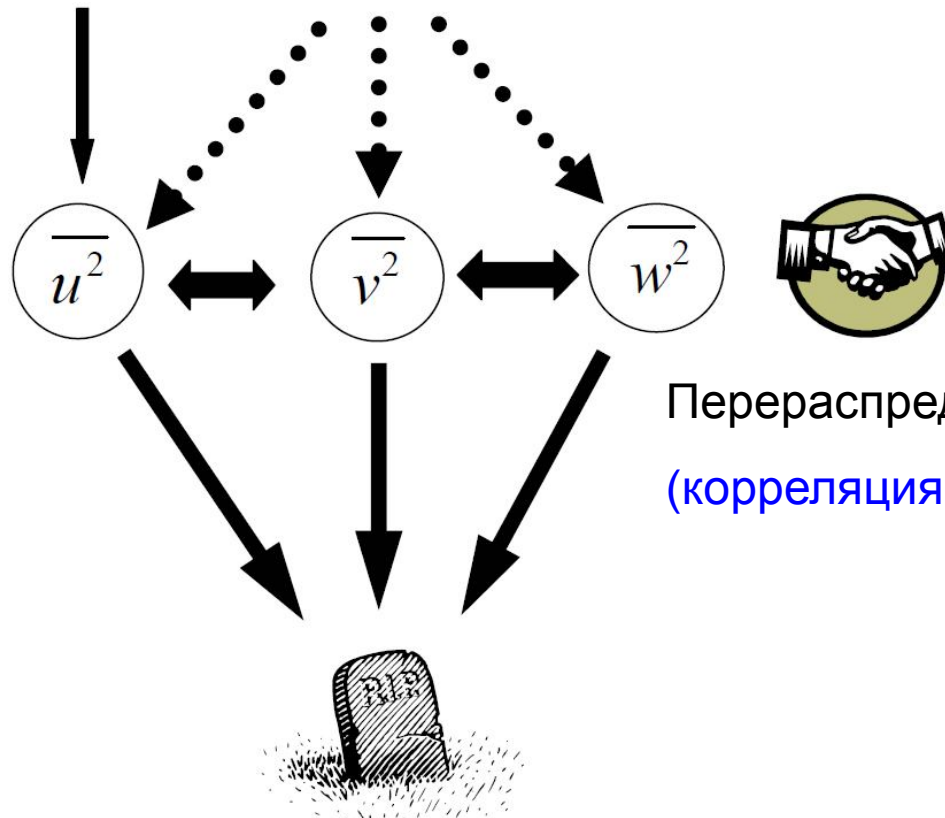
- Для замыкания системы уравнений необходимо промоделировать **турбулентную диффузию**, **корреляцию давление – скорость деформации** и **диссипацию**

# Уравнения для рейнольдсовых напряжений

Генерация



Конвекция и диффузия основным потоком



Перераспределение пульсациями давления  
(корреляция давление-скорость деформации)

Диссипация в тепло за счет вязкости

# Уравнение переноса кинетической энергии турбулентности

- Уравнение для кинетической энергии турбулентности  $k = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2}$  получается путем свертки уравнений для рейнольдсовых напряжений

- В случае несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} + D_j \right) - \varepsilon$$

➤ **Турбулентная диффузия**  $D_j = -\overline{u'_j \left( \frac{u'_i u'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)}$

- ✓ Молекулярный и турбулентный диффузионный перенос

➤ Генерация  $P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$

- ✓ Получение энергии от осредненного течения

➤ **Диссипация**  $\varepsilon = -\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$

- ✓ Передача энергии в тепло за счет вязких сил

- В этом уравнении также много неизвестных: **турбулентная диффузия**, **диссипация** и замыкающие соотношения для напряжений Рейнольдса

# Эффекты сжимаемости

- В сжимаемом случае в уравнении для кинетической энергии турбулентности появляются два новых слагаемых

- Равны нулю в несжимаемом случае

$$\overline{\rho} \frac{\partial k}{\partial t} + \overline{\rho \tilde{u}_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{t,ji} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\tau_{ji} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\tau_{ji} u_i''} - \frac{1}{2} \overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''} - p' u_i'' \right) \left( -\overline{u_i''} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_i}} \right)$$

- ✓ Работа давления
- ✓ Давление-растяжение

- Работа давления есть и в уравнении переноса рейнольдсовых напряжений

$$\frac{\partial \tau_{t,ij}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_j \tau_{t,ij}}{\partial x_j} = P_{ij} + \varepsilon_{ij} - \Phi_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( -(\overline{\tau_{kj} u_i''} + \overline{\tau_{ki} u_j''}) + D_{ijk} \right) + \overline{u_i''} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \overline{u_j''} \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

- Давление-растяжение следует из свертки корреляции давление-скорость

деформации  $\Phi_{ij} = \overline{p' \left( \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \right)}$

# Модели турбулентности

- Попытка замкнуть уравнения для рейнольдсовых напряжений на основе формализма Рейнольдса приводит к появлению еще большего числа неизвестных
  - Необходимо привлекать дополнительные соображения
    - ✓ Эмпирические закономерности
- Формулы для замыкания уравнений Рейнольдса (для определения  $\tau_{ij}^T = \rho \overline{u'_i u'_j}$ ) называются **полуэмпирические модели турбулентности**
  - Устанавливают связь между тензором Рейнольдсовых напряжений  $\tau_{ij}^T$  и параметрами осредненного потока.
- В настоящее время разработаны сотни моделей турбулентности, но ни одна из них не является универсальной, т.е. подходящей для любых течений

# Проблемы полуэмпирических моделей турбулентности

- Полуэмпирические модели турбулентности выражают тензор рейнольдсовых напряжений через параметры осредненного потока
  - Наличие такой зависимости неочевидно
- В большинстве моделей эта связь является локальной
  - Удобно для использования в расчетах
  - Вызывает еще больше вопросов

Пример:

- Рассмотрим модельную задачу, в которой  $u' = \sin(\omega t), v' = \sin(\omega t + \varphi_0)$ 
  - Рассмотрим корреляцию  $\overline{u'v'} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u'v' \cdot dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.5 \cdot \cos(\varphi_0)$
- Видно, что искомая корреляция зависит только от сдвига фазы и не связана со средними величинами
  - Причина такого поведения в значительной степени состоит в неслучайности рассмотренных пульсаций
    - ✓ В этом случае статистические подходы плохо применимы

# Несовершенство моделей турбулентности

- В отличие от уравнений движения модели турбулентности не являются универсальными физическими законами
- Большинство моделей турбулентности базируются на закономерностях, характерных для простых «канонических» течений
  - ✓ Закон стенки
  - ✓ Формула Колмогорова
  - ✓ ...
- Как только эти закономерности перестают выполняться – точность расчета падает
- Константы в моделях турбулентности «настраиваются» на определенный набор течений
  - Часто приходится при настройке идти на компромисс



- Не существует универсальных моделей турбулентности, каждая модель имеет свою «область применимости»



# Проблема выбора моделей турбулентности

- При расчете конкретных течений необходимо не только выбрать наиболее подходящую модель турбулентности, но и оценить степень достоверности полученных с ее помощью результатов.
- Проводятся многочисленные работы по тестированию моделей турбулентности
  - Стэнфордские конференции
  - Международные проекты
  - Workshop
  - Академические исследования



- Лучшие современные модели турбулентности хорошо изучены
  - Известна их способность предсказывать свойства тех или иных течений
  - Для многих течений известны наиболее надежные модели

# Гипотеза Буссинеска

- Буссинеск (1877) предложил ввести дополнительную (турбулентную) вязкость
- Большинство моделей турбулентности используют обобщенную гипотезу Буссинеска

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_T \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = 2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

- Линейная связь между тензором Рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций
  - Аналог реологического закона Ньютона для молекулярной вязкости
- Достоинства
    - Использование гипотезы Буссинеска позволяет сократить количество определяемых в процессе моделирования переменных с 6 до 1.
  - Недостатки
    - В некоторых случаях гипотеза Буссинеска несправедлива и ее использование приводит к получению качественно неверного результата

В таких случаях необходимо использование моделей рейнольдсовых напряжений или нелинейных моделей

# Особенности, возникающие в сжимаемом газе

- Дивергенция скорости не равна нулю
  - След тензора скоростей деформаций не равен нулю

✓ Гипотеза Буссинеска преобразуется в

$$\boldsymbol{\tau}_t = 2\mu_t \left( \mathbf{S} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \vec{u} \right) + \frac{2}{3} k \mathbf{I}$$

➤ Иногда обозначают

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)$$

- Турбулентный тепловой поток  $q_{t,i} = -\overline{\rho u_i'' h''}$ 
  - Закон Фурье (частный случай градиентной диффузии)

$$\vec{q}_t = -\lambda_t \nabla T$$

✓ Турбулентная теплопроводность выражается при помощи

аналогии Рейнольдса  $\lambda_t = \frac{C_P \mu_t}{Pr_t},$

# Турбулентная вязкость

- Величина  $\nu_T$  в гипотезе Буссинеска  $-\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_T \cdot S_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}$  называется турбулентной вязкостью

- Не фундаментальная физическая величина, а лишь коэффициент пропорциональности

- Уравнения Рейнольдса с использованием гипотезы Буссинеска

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho(\nu + \nu_T) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \end{cases}$$

- В них входит модифицированное давление  $\tilde{p} = p + \frac{2}{3}\rho k$

- В несжимаемой жидкости может влиять только около границ

- В сжимаемом газе все сложнее...

- Турбулентное число Рейнольдса  $Re_t = \frac{\nu_T}{\nu}$

- Характеризует соотношение турбулентного и молекулярного переноса

- ✓ Часто используется в моделях турбулентности

## Резюме

- Уравнения Рейнольдса получаются путем осреднения уравнений Навье-Стокса по Рейнольдсу
- В этом подходе вся турбулентность моделируется и ее влияние учитывается через напряжения Рейнольдса, которые необходимо определить
- Определение напряжений Рейнольдса – задача модели турбулентности
- В основе моделей турбулентности лежат уравнения для напряжений Рейнольдса (незамкнутые) и эмпирическая информация
- В большинстве моделей используется гипотеза Буссинеска – линейная связь между напряжениями Рейнольдса и тензором скоростей деформаций