

Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет

На правах рукописи

Магидов Дмитрий Рудольфович

Определение условий возникновения глобальных автоколебаний
в двумерных потоках на основе линейной теории устойчивости

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: к.ф.-м. н., доц., Андрей Викторович Гарбарук.

Санкт-Петербург 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

Оглавление	2
ВВЕДЕНИЕ	4
Глава 1 ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСЛОВИЙ РАЗВИТИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПОТОКА	9
1.1. Основные идеи и приложения линейной теории устойчивости в задачах аэродинамики	10
1.2. Постановка и алгоритм решения задач об устойчивости стационарных решений уравнений Навье-Стокса и Рейнольдса в рамках ЛТУ	18
1.2.1. Линеаризация основных уравнений.	18
1.2.2. Линеаризация уравнения переноса турбулентной вязкости.	28
1.2.3. Дискретизация уравнений.	32
1.2.4. Приведение обобщенной задачи на собственные значения к стандартной задаче.	38
1.2.5. Решение задачи на собственные значения.	40
1.3. Применение ЛТУ для оценки эффективности методов управления устойчивостью потока	43
1.3.1 Краткий обзор состояния вопроса.	43
1.3.2. Алгоритм оперативной оценки влияния малых возмущений на условия возникновения глобальных автоколебаний в сжимаемых потоках.	46
1.3.3. Основные этапы численной реализации алгоритма	49
Глава 2 ТЕСТИРОВАНИЕ РАЗРАБОТАННЫХ АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ	52
2.1. Проверка матрицы коэффициентов системы линейных уравнений для амплитуд возмущений	53
2.1.1. Изменение матрицы при повороте системы координат вокруг оси z	53
2.1.2. Изменение матрицы при движении системы координат вдоль оси z с постоянной скоростью.	56

2.2. Тестирование разработанных алгоритмов на примере решения задачи об устойчивости ламинарного двумерного обтекания цилиндра.....	60
2.2.1. Описание расчетов.....	60
2.2.2. Обсуждение результатов.....	62
Глава 3 ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗРАБОТАННЫХ МЕТОДОВ	70
3.1. Решение задачи об устойчивости ламинарного обтекания цилиндра под ненулевым углом скольжения (при наличии стреловидности).....	71
3.2. Определение условий начала трансзвукового бафтинга при турбулентном обтекании аэродинамических профилей.....	73
3.2.1. Обзор экспериментальных и расчетных исследований явления трансзвукового бафтинга.....	73
3.2.2. Применение ЛТУ для расчета условий начала трансзвукового бафтинга при обтекании джонковидного 18% симметричного профиля при нулевом угле атаки и профиля НАСА 0012.....	85
3.3. Решение задачи о влиянии цилиндра малого диаметра, помещенного в след большого цилиндра, на устойчивость его обтекания.....	95
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	107
Список литературы.....	109

ВВЕДЕНИЕ

Потеря устойчивости и переход от стационарного режима течения к нестационарному сопровождается кардинальными изменениями всех характеристик потока. Наиболее известным примером такого рода явлений является переход от ламинарной формы течения к турбулентной. Однако потеря устойчивости далеко не всегда связана с переходом к турбулентности. Глобальные (затрагивающие все течение) автоколебания могут возникать как в ламинарных потоках при сравнительно низких числах Рейнольдса (классическим примером таких автоколебаний является вихревая дорожка Кармана), так и в развитых турбулентных течениях. С практической точки зрения, одно из наиболее важных последствий возникновения глобальных автоколебаний потока в аэродинамических приложениях состоит в появлении нестационарных нагрузок на обтекаемую поверхность (например, на крыло самолета), что является крайне нежелательным и неоднократно приводило к авариям и даже к гибели самолетов. Поэтому знание условий возникновения глобальных автоколебаний является необходимым условием обеспечения безопасности полетов. Наряду с этим, такая информация является весьма полезной при численном решении стационарных задач аэродинамики, поскольку отсутствие сходимости используемых для этого итерационных алгоритмов, часто имеющее место в практических вычислениях, может быть обусловлено как недостатками самих алгоритмов, так и объективными физическими причинами, связанными с неустойчивостью стационарного течения. Учитывая, что критерии сходимости итераций, как правило, отсутствуют, различить эти две ситуации можно лишь на основе надежных знаний о границах устойчивости рассматриваемого течения. Более того, при использовании метода установления по времени, являющегося наиболее популярным при решении уравнений Навье-Стокса и Рейнольдса, в зависимости от значений вычислительных параметров (в первую очередь, шага интегрирования по времени) возможно получение как стационарных, так и нестационарных решений, причем осредненное по времени нестационарное решение существенно отличается от стационарного. В этой ситуации выбор

правильного (соответствующего реальному течению) типа решения, который может быть сделан на основе знаний об условиях возникновения в рассматриваемом потоке глобальных автоколебаний, становится очень важным, даже если целью расчета является определение только стационарных (средних) характеристик потока.

Таким образом, надежные подходы к определению условий потери устойчивости и перехода к автоколебательным режимам течения представляют большой практический и методический интерес. В настоящее время существует несколько таких подходов, каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки.

Наиболее достоверные данные, очевидно, могут быть получены экспериментальным путем. Однако, наряду с высокой стоимостью соответствующих исследований (данный довод в пользу расчетных методов приобретает в последние годы все большее значение), этот подход имеет ряд других принципиальных ограничений, особенно для задач характерных для внешней аэродинамики. Прежде всего, в лабораторных условиях практически невозможно воспроизвести значения определяющих параметров реальных течений. Например, при обтекании крыла современного гражданского самолета число Рейнольдса составляет порядка 10^7 - 10^8 , а число Маха – 0.7-0.9, и именно эти параметры, наряду с углом атаки, определяют границы устойчивости стационарного трансзвукового обтекания крыла или, иными словами, – условия возникновения трансзвуковых автоколебаний (трансзвукового бафтинга). Кроме того, на условия возникновения глобальных автоколебаний существенное влияние оказывают некоторые трудно контролируемые условия эксперимента (размеры рабочей части аэродинамической трубы, уровень турбулентности потока и т. п.). Все это значительно затрудняет получение надежных экспериментальных данных по условиям глобальной устойчивости стационарных течений, представляющих практический интерес.

Среди расчетных методов определения этих условий можно выделить две основные группы.

К первой группе относятся методы, базирующиеся на численном решении нестационарных уравнений Навье-Стокса или Рейнольдса при турбулентных режимах течения. К сожалению, даже при проведении единичных расчетов численное решение этих уравнений для достаточно сложных трехмерных течений, представляющих практический интерес, требует привлечения значительных вычислительных ресурсов, а для определения границ устойчивости необходимо проведение большого числа расчетов в широком диапазоне изменения определяющих параметров течения (чисел Маха и Рейнольдса, угла атаки и т. д.). Кроме того, при условиях близких к “критическим” (соответствующим потере устойчивости стационарного режима моделируемого течения) для определения типа решения расчеты необходимо проводить на больших по сравнению с характерным конвективным временем интервалах с достаточно мелким шагом интегрирования по времени. Наконец, тип решения зависит при этом от особенностей используемых вычислительных алгоритмов и от конкретных вычислительных параметров (начальное приближение, разностная сетка, способ пространственной и временной дискретизации исходных уравнений и т. п.). Таким образом, методы определения границ устойчивости стационарных течений, основанные на численном интегрировании нестационарных уравнений движения, с одной стороны, требуют больших вычислительных ресурсов, а с другой, – являются недостаточно надежными.

Ко второй группе методов, которые могут применяться для решения рассматриваемой задачи, относятся методы, базирующиеся на классической Линеиной Теории Устойчивости (ЛТУ). Их важным преимуществом перед кратко рассмотренными выше методами, основанными на численном решении нестационарных уравнений движения, является относительная экономичность и достаточно высокая надежность. Однако методы, опирающиеся на ЛТУ, требуют большой оперативной памяти компьютера (это обусловлено необходимостью решения задач на собственные значения для матриц очень большого размера), в связи с чем данная группа методов также пока не получила широкого применения при решении практических задач. Тем не

менее, учитывая их потенциальные возможности, а также тенденцию к быстрому росту оперативной памяти компьютеров, развитие таких методов применительно к анализу условий возникновения глобальных автоколебаний в различных потоках, которому посвящена данная работа, представляется весьма актуальной задачей, решение которой имеет как важное методическое, так и непосредственное практическое значение.

Конкретные задачи работы состоят в следующем.

1. Разработка и программная реализация базирующихся на ЛТУ алгоритмов определения условий возникновения глобальных автоколебаний в двумерных и квазитрехмерных течениях.

2. Разработка и программная реализация приближенной методики оперативной оценки эффективности методов управления устойчивостью путем внесения в поток малых возмущений.

3. Верификация разработанных алгоритмов и программных средств.

4. Применение разработанных алгоритмов и программных средств для решения следующих конкретных задач:

- определение устойчивости ламинарного обтекания цилиндра при наличии угла скольжения;
- определение условий начала автоколебаний скачка уплотнения (трансзвукового бафтинга) при трансзвуковом турбулентном обтекании аэродинамических профилей;
- исследование устойчивости обтекания цилиндра при наличии в его следе цилиндра малого диаметра.

Диссертация состоит из настоящего введения, трех основных глав, заключения и списка литературы.

В первой главе проведен краткий обзор основных результатов применения методов ЛТУ в задачах аэродинамики и представлено подробное описание методов, предлагаемых в настоящей работе.

Вторая глава посвящена тестированию разработанных методов, которое включает как “внутренние” тесты, вытекающие из инвариантности рассматриваемых уравнений относительно преобразования системы координат,

так и сопоставление полученных с их помощью результатов с аналогичными результатами, полученными на основе решения нестационарных уравнений Навье-Стокса, и с известными экспериментальными данными.

В третьей главе приводятся примеры применения разработанного математического аппарата. В частности, с его помощью рассмотрены задачи об устойчивости ламинарного обтекания цилиндра при наличии угла скольжения и об определении условий начала трансзвукового бафтинга при турбулентном обтекании симметричного 18% двояковыпуклого профиля и профиля NASA 0012. Кроме того, проведено исследование влияния на устойчивость обтекания цилиндра возмущений, вносимых в его след другим цилиндром малого диаметра.

В заключении кратко сформулированы основные результаты, полученные в ходе проведения данной работы.

ГЛАВА 1
ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСЛОВИЙ РАЗВИТИЯ
ГЛОБАЛЬНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПОТОКА

Данная глава посвящена изложению разработанных в диссертации методов определения условий возникновения глобальных автоколебаний в ламинарных и турбулентных потоках на основе ЛТУ. В ее первом параграфе кратко излагаются основные идеи ЛТУ, рассматриваются задачи аэродинамики, для решения которых она нашла наиболее широкое применение, и обсуждаются некоторые проблемы, связанные с применением ЛТУ к уравнениям Рейнольдса. Во втором параграфе представлены используемые постановки задач и подробно описан комплекс вычислительных алгоритмов, разработанных в диссертации для их решения, а в третьем – описан метод, позволяющий оперативно оценить влияние малых возмущений потока на устойчивость течений у плохобтекаемых тел.

1.1. Основные идеи и приложения линейной теории устойчивости в задачах аэродинамики

Математический аппарат ЛТУ является мощным инструментом для анализа устойчивости самых разнообразных механических систем. Применительно к механике жидкости и газа ЛТУ обычно используется для анализа устойчивости стационарных решений нестационарных уравнений движения, в роли которых могут выступать как полные уравнения Навье-Стокса (Рейнольдса в случае турбулентных режимов течения) или Эйлера, так и их более простые формы, например, уравнения пограничного слоя. Решения этих уравнений представляются в виде суммы стационарного (базового) решения и малых нестационарных возмущений, после чего осуществляется линеаризация исходных уравнений относительно возмущений. В силу линейности полученной в результате системы дифференциальных уравнений различные временные гармоники возмущений могут рассматриваться независимо друг от друга, что позволяет получить однородную систему линейных уравнений для амплитуд возмущений. Отыскание нетривиального решения этой системы в сочетании с соответствующим образом линеаризованными граничными условиями сводится, таким образом, к решению задачи на собственные значения для линейного дифференциального оператора. Мнимая часть полученного при решении этой задачи собственного числа определяет частоту собственных колебаний оператора, а вещественная – скорость их роста или затухания (в зависимости от знака). Таким образом, для ответа на вопрос об устойчивости или неустойчивости стационарного решения достаточно найти собственное число с наименьшей вещественной частью (если она оказывается отрицательной, то стационарное решение неустойчиво).

Начало активного использования ЛТУ в аэродинамике связано с именем Толлмина, применившего эту теорию для определения условий перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения в пограничном слое на плоской пластине (*Tollmien, 1929*). Разработанный Толлмином метод опирается на предположение о том, что базовое течение имеет только одну ненулевую

компоненту скорости (течения, удовлетворяющие таким требованиям, часто называют параллельными) и является одномерным (изменяется только вдоль направления, ортогонального к направлению этой ненулевой компоненты скорости). Кроме того, предполагается, что возмущения являются либо одномерными (изменяются только в том же направлении, что и базовое решение), либо трехмерными, но периодическими по двум другим направлениям.

В случае несжимаемых параллельных потоков математическая формулировка уравнений для возмущений сводится к уравнению Орра-Зоммерфельда (см., например, *Линь, 1958*), на основе решения которого были получены классические результаты об условиях перехода к турбулентности в зазоре между движущимися поверхностями (течение Куэтта), в установившемся течении в плоском канале (течение Пуазейля) и в пограничном слое на плоской пластине (задача Блазиуса). Результаты этих исследований представлены в известной работе *Линя, 1958*.

Наряду с изучением границ устойчивости несжимаемых потоков, ЛТУ с успехом использовалась для анализа устойчивости параллельных и близких к параллельным *сжимаемых* течений, в частности, для исследования развития возмущений и условий перехода к турбулентности в сверхзвуковых и гиперзвуковых пограничных слоях и следах (см., например, *Lees, Gold, 1964, Герценштейн, Кашко, 1972, Маск, 1975*). Подробный обзор работ этого направления представлен в монографии *Гапонов, Маслов, 1980*. Эти исследования по-прежнему остаются актуальными и продолжаются в настоящее время (см., например, работу *Маслов и др., 2004*).

Дальнейшее развитие методов ЛТУ связано с отказом от предположения о параллельности течения. В частности, в работе *Варанаев и др., 1973* исследовано влияние непараллельности потока на устойчивость слоя смещения, а в работах *Gaster, 1974* и *Герценштейн, Штемлер, 1976* – на устойчивость пограничных слоев.

В рамках описанных подходов возможно приближенное определение условий устойчивости не только одномерных, но и двумерных базовых течений

путем исследования устойчивости профилей скорости в отдельных сечениях потока. Такой подход использовался, например, в работе *Hammond, Redekopp, 1998* для определения условий устойчивости ламинарного отрывного пузыря на основе соответствующим образом модифицированных профилей Фокнера-Скэн. При этом показано, в частности, что данное течение теряет устойчивость, когда пик скорости возвратного течения в пузыре достигает величины, составляющей примерно 30% от скорости внешнего потока. Аналогичный подход применялся *Rowley et al., 2002* для исследования устойчивости обтекания прямоугольной каверны. В этой работе осуществлялся поиск пространственных собственных возмущений заданной частоты, развивающихся в слое смешения, сходящем с переднего края каверны, а устойчивость профилей скорости в различных сечениях исследовалась в приближении невязкого локально параллельного течения. Хотя скорость развития возмущений, рассчитанная в рамках этих допущений, оказалась заметно завышенной, их форму удалось определить достаточно точно.

Таким образом, применение методов ЛТУ для определения условий устойчивости одномерных и близких к одномерным течений позволили получить ряд важных фундаментальных результатов. Вместе с тем, класс течений, удовлетворяющих указанным допущениям, весьма ограничен, а подавляющее большинство течений, изучение устойчивости которых представляет практический интерес, являются либо трехмерными, либо, в лучшем случае, – двумерными.

Для определения условий устойчивости двумерных течений необходимо найти решение задачи на собственные значения, полученной на основе полных трехмерных уравнений Навье-Стокса в предположении о периодическом характере изменения возмущений в одном из пространственных направлений. Данный подход позволяет рассматривать также трехмерные течения, характеристики которых медленно изменяются в одном из направлений, так что анализ устойчивости может быть применен к одному или нескольким плоским сечениям потока. Среди работ, относящихся к этому направлению,

следует отметить ряд интересных исследований, выполненных в конце 80-х годов прошлого века.

Так, в работе *Pierrehumbert, 1986* рассмотрена задача об устойчивости двумерного несжимаемого невязкого вихря к трехмерным возмущениям. При этом показано, что для возмущений, имеющих малую длину волны вдоль оси вихря, скорость роста возмущений не зависит от длины волны, а сами возмущения сконцентрированы вблизи оси вихря.

В работе *Zebib, 1987* рассматривались условия возникновения колебаний следа при вязком обтекании круглого цилиндра. При этом показано, что данное течение теряет устойчивость к несимметричным возмущениям при значении числа Рейнольдса $Re_c \approx 43$, оставаясь при этом устойчивым к симметричным возмущениям. В том же году *Jackson, 1987* независимо получил для этого течения значение критического числа Рейнольдса $Re_c \approx 46$.

Tatsumi, Yoshimura, 1990 исследовали условия перехода к турбулентности в установившемся течении в канале прямоугольного сечения с различным отношением ширины к высоте H_1/H_2 . Они установили, что при $H_1/H_2 \leq 3.2$ данное течение остается устойчивым при сколь угодно больших числах Рейнольдса, а при $H_1/H_2 > 3.2$, критическое число Рейнольдса существует и монотонно падает с ростом H_1/H_2 , асимптотически приближаясь к известной величине для течения Пуазейля (*Orszag, 1971*): $Re_c = 5772$ (см. рис.1.1).

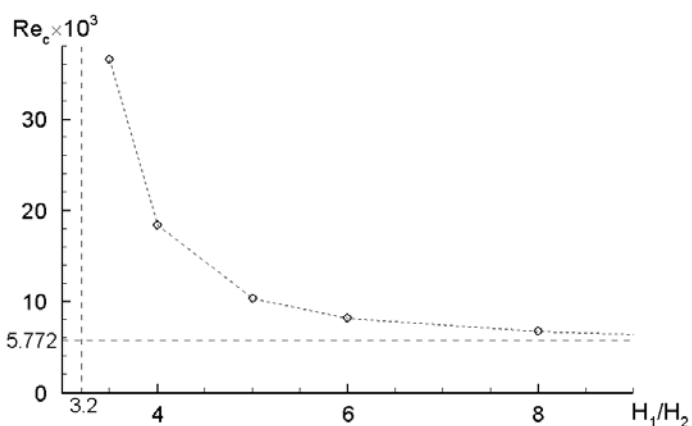


Рис. 1.1. Зависимость критического числа Рейнольдса от отношения ширины канала к его высоте (*Tatsumi, Yoshimura, 1990*)

В дальнейшем, в связи с развитием вычислительной техники и разработкой эффективных численных алгоритмов решения задач на собственные значения, круг течений, для анализа которых с успехом применялись методы ЛТУ, значительно расширился. В качестве примеров можно назвать такие достаточно сложные течения как пограничные слои вблизи линии растекания (*Hall, Malik, 1986, Joslin, 1995, Устинов, 2004*), гиперзвуковые пограничные слои (*Егоров и др., 2004, Маслов и др., 2004*), пограничные слои с отрывом (*Dovgal et al., 1994*), течения за обратными уступами (*Barkley et al., 2002*), течения в кавернах и каналах (*Theofilis, Duck, Owen, 2004*) и т. д. Детальный обзор и анализ результатов, полученных на основе применения ЛТУ, для некоторых из перечисленных и ряда других достаточно сложных течений представлен в работе *Theofilis, 2003*.

Что касается анализа устойчивости существенно трехмерных течений, которые представляют наибольший практический интерес, то применение для этих целей методов ЛТУ все еще практически невозможно в связи с исключительно высокими вычислительными ресурсами необходимыми для решения соответствующих задач.

Следует также отметить, что все кратко рассмотренные выше работы посвящены либо определению критериев перехода от ламинарной формы течения к турбулентной, либо исследованию условий возникновения глобальных автоколебаний в ламинарных течениях. Исследования устойчивости турбулентных течений, начатые в конце 60-х годов прошлого века, весьма ограничены и посвящены, главным образом, изучению развития крупномасштабных возмущений в турбулентных сдвиговых течениях. Так, в работах *Hussain, Reynolds, 1970, Reynolds, Hussain, 1972* на основе так называемой тройной декомпозиции, которая состоит в представлении решения в виде суммы осредненной по времени стационарной составляющей, осредненной по фазе когерентной составляющей и пульсационной составляющей, было получено модифицированное уравнение Орра-Зоммерфельда для случая турбулентного течения, в котором рейнольдсовы напряжения определяются в рамках гипотезы Буссинеска. При этом показано, в

частности, что квазиламинарный подход, то есть предположение о равенстве нулю турбулентной вязкости в уравнении устойчивости, не позволяет корректно описать развитие возмущений для течения в канале, в то время как даже весьма нестрогое допущение о постоянстве турбулентной вязкости (ее значение оценивалось на основе экспериментальных данных) позволило существенно улучшить получаемые результаты.

В работе *Gaster, Kit, Wygnanski, 1985* на основе ЛТУ исследовалось развитие крупномасштабных вихревых структур в турбулентном слое смешения. Анализ устойчивости применялся как к аналитическим, так и к полученным в эксперименте осредненным профилям скорости турбулентного течения. При анализе устойчивости авторы пренебрегли вязкими членами, что привело к значительной недооценке скорости развития возмущений. Аналогичный анализ устойчивости турбулентного слоя смешения, проведенный в работе *Reau, Tumin, 2002* с учетом турбулентной вязкости, позволил получить результаты, хорошо согласующиеся с экспериментом.

В работах *Sen, Veervalli, 2000a* и *Sen, Veervalli, 2000b* исследовалась устойчивость пристенных турбулентных течений. При этом значение турбулентной вязкости вычислялось с помощью анизотропной алгебраической модели турбулентности, позволившей добиться хорошего согласования результатов линейного анализа с экспериментом.

Отметим, что во всех приведенных выше работах рассматриваются параллельные течения и решаются уравнения Орра-Зоммерфельда или аналогичные им, при этом турбулентная вязкость вычисляется с помощью алгебраических моделей турбулентности, а возмущения турбулентной вязкости не учитываются.

Примером исследования, в котором рассматривается устойчивость турбулентного течения без использования допущения о параллельности потока, может служить работа *Broadhurst, Theofilis, Sherwin, 2004*. В ней исследовалось развитие вихревого следа, сходящего с кромки крыла. При этом базовое стационарное решение было получено путем численного интегрирования уравнений Рейнольдса, а исследование его линейной устойчивости к

трехмерным возмущениям осуществлялось на основе параболизированных линейризованных уравнений Навье-Стокса без учета турбулентной вязкости. На рис. 1.2.(а) показано базовое поле продольной компоненты осредненной по Рейнольдсу скорости \bar{w} , а на рис. 1.2.(б) – поле неустойчивого собственного возмущения для этой компоненты, полученные в работе *Broadhurst, Theofilis, Sherwin, 2004*. В работе показано, что результаты расчетов развития вихревой системы, полученные на основе ЛТУ, хорошо согласуются с результатами прямого численного моделирования.

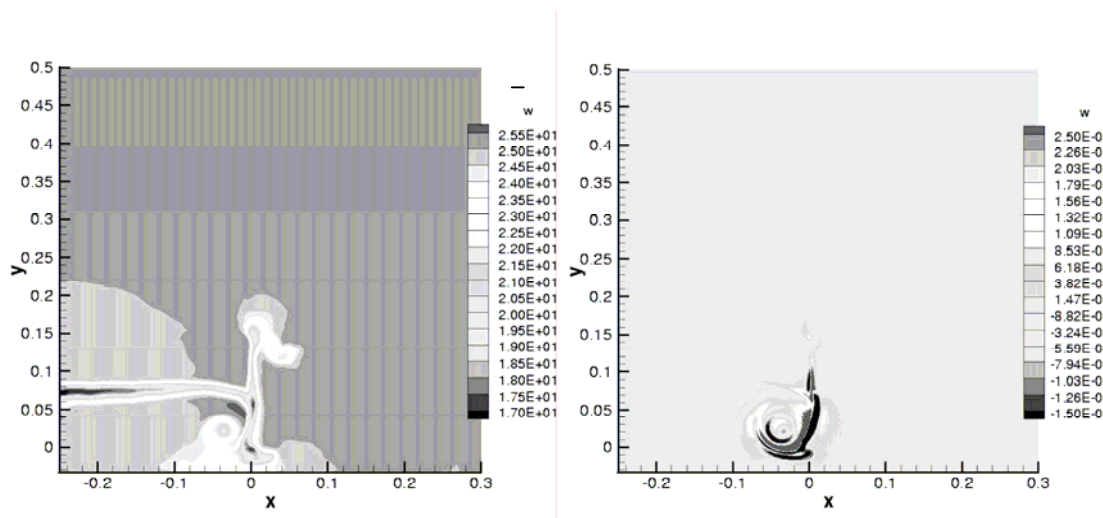


Рис. 1.2. Поля осредненной по Рейнольдсу w -компоненты скорости (а) и неустойчивого собственного возмущения этой компоненты скорости (б) (Broadhurst, Theofilis, Sherwin, 2004).

При анализе рассмотренных работ обращает на себя внимание тот факт, что для исследования устойчивости турбулентных течений ни в одной из них не привлекаются уравнения Рейнольдса. Это отчасти объясняется сложностью линейризации этих уравнений, связанной с наличием в модельных уравнениях переноса характеристик турбулентности, замыкающих уравнения Рейнольдса, сложных сильно нелинейных генерационных и диссипативных членов. Другая, более фундаментальная причина состоит, по-видимому, в том, что вплоть до настоящего времени вопрос о правомерности применения нестационарной формы уравнений Рейнольдса (Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes equations или URANS в англоязычной литературе) остается не вполне ясным. С одной стороны, сомнения в применимости URANS связаны с внутренним

противоречием между нестационарной формой уравнений и процедурой осреднения по Рейнольдсу, предполагающей интегрирование по всему временному интервалу. С другой стороны, точность моделей турбулентности, используемых для замыкания уравнений Рейнольдса, часто оставляет желать лучшего даже при расчете стационарных течений, на основе которых эти модели калибровались и тестировались. Указанное обстоятельство свидетельствует о недостаточной обоснованности их применения при расчете нестационарных течений.

Несмотря на то, что в последние годы указанные проблемы широко обсуждаются в литературе (см., например, обзорные работы *Franke, Rodi, 1991, Durbin, 2002*), единого мнения по данному вопросу не существует. Тем не менее, многочисленные численные исследования различных турбулентных течений, выполненные в рамках URANS в последние годы, свидетельствуют о том, что во многих случаях эти уравнения с достаточно высокой точностью описывают характеристики относительно низкочастотных глобальных автоколебаний в турбулентных потоках, исследование условий возникновения которых на основе ЛТУ является одной из основных задач данной работы. В качестве примеров можно привести расчеты обтекания квадратного (*Franke, Rodi, 1991*), треугольного (*Durbin, 1995* и *Johanansson et al., 1993*) и круглого (*Shur et al., 1996*) цилиндров, обтекание прямоугольной каверны (*Mendonca et al., 2003*), истечение плоской струи в проем двери (*Тюменцев, 2004*) и в прямоугольную полость (*Денисихина и др., 2005*) и ряд других аналогичных исследований. С учетом этого, а также, принимая во внимание то обстоятельство, что при исследовании условий устойчивости рассматриваются лишь малые отклонения от стационарных решений уравнений Рейнольдса, для которых, по крайней мере, некоторые из существующих моделей турбулентности, по-видимому, можно считать достаточно надежными, попытка применения методов ЛТУ к уравнениям Рейнольдса, предпринятая в настоящей работе представляется достаточно обоснованной.

1.2. Постановка и алгоритм решения задач об устойчивости стационарных решений уравнений Навье-Стокса и Рейнольдса в рамках ЛТУ

С учетом формального сходства уравнений Навье-Стокса и Рейнольдса, в данном параграфе рассмотрение постановок и методов решения задач об устойчивости ламинарных и турбулентных течений в рамках ЛТУ проводится на примере уравнений Рейнольдса. Для анализа устойчивости ламинарных течений, достаточно заменить входящие в эти уравнения эффективные коэффициенты вязкости и теплопроводности на соответствующие молекулярные коэффициенты переноса.

1.2.1. Линеаризация основных уравнений.

Обозначим через вектор $\mathbf{q} = \{\rho, u, v, w, T, \nu_t\}^T$ вектор основных переменных трехмерных нестационарных уравнений Рейнольдса для сжимаемого газа (ρ – плотность, (u, v, w) – проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат (x, y, z) , T – температура, а ν_t – турбулентная вязкость). Пусть далее $\bar{\mathbf{q}} = \{\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{T}, \bar{\nu}_t\}^T$ представляет собой стационарное решение этих уравнений, которое не изменяется вдоль направления z ($\partial \bar{\mathbf{q}} / \partial z = 0$), то есть, является квазитрехмерным. Тогда $\bar{\mathbf{q}}$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial(\bar{\rho}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}v)}{\partial y} = 0, \\
\frac{\partial(\bar{\rho}u^2 + \bar{\rho}RT)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}uv)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\tau}_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\tau}_{xy}), \\
\frac{\partial(\bar{\rho}uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}v^2 + \bar{\rho}RT)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\tau}_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\tau}_{yy}), \\
\frac{\partial(\bar{\rho}wu)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}wv)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\tau}_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\tau}_{yz}), \\
\frac{\partial(\bar{\rho}u C_p \bar{T} + 0.5\bar{\rho}u(u^2 + v^2 + w^2))}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}v C_p \bar{T} + 0.5\bar{\rho}v(u^2 + v^2 + w^2))}{\partial y} = \\
= \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{\tau}_{xx} + \bar{v}\bar{\tau}_{xy} + \bar{w}\bar{\tau}_{xz} + \bar{q}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{\tau}_{xy} + \bar{v}\bar{\tau}_{yy} + \bar{w}\bar{\tau}_{yz} + \bar{q}_y)
\end{array} \right. \quad (1.1)$$

При записи этой системы предполагается, что удельная теплоемкость при постоянном давлении C_p является постоянной и что рассматриваемый газ является совершенным, то есть для него выполняется уравнение состояния Клапейрона - Менделеева

$$\bar{p} = \bar{\rho}R\bar{T}/m, \quad (1.2)$$

где \bar{p} - давление, R - универсальная газовая постоянная, а m – молярная масса газа.

С учетом предположения о квазитрехмерном характере течения, используя гипотезу Буссинеска и аналогию Рейнольдса, компоненты эффективного тензора напряжений $\bar{\tau}_{ij}$ и вектора плотности теплового потока \bar{q}_i , входящие в систему (1.1), определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_{xx} &= 2\bar{\mu}_{eff} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3}\bar{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right), & \bar{\tau}_{xy} &= \bar{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right), & \bar{\tau}_{xz} &= \bar{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right), \\
\bar{\tau}_{yy} &= 2\bar{\mu}_{eff} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \frac{2}{3}\bar{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right), & \bar{\tau}_{yz} &= \bar{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right), & \bar{\tau}_{zz} &= -\frac{2}{3}\bar{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right), \\
\bar{q}_x &= -\left(\bar{\lambda}_{eff} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right), & \bar{q}_y &= -\left(\bar{\lambda}_{eff} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right),
\end{aligned} \quad (1.3)$$

где эффективные коэффициенты вязкости $\bar{\mu}_{eff}$ и теплопроводности $\bar{\lambda}_{eff}$ представляют собой суммы соответствующих молекулярных коэффициентов и их турбулентных аналогов

$$\bar{\mu}_{eff} = \mu(\bar{T}) + \bar{\rho}\bar{v}_t, \quad \bar{\lambda}_{eff} = C_p \left(\frac{\mu(\bar{T})}{Pr} + \frac{\bar{\rho}\bar{v}_t}{Pr_t} \right), \quad (1.4)$$

а Pr и Pr_t – молекулярное и турбулентное числа Прандтля. При проведении конкретных расчетов они полагаются равными 0.72 и 0.9 соответственно, а для определения турбулентной вязкости используется модель турбулентности Спаларта-Аллармаса (*Spalart, Allmaras, 1992*) (см. раздел 1.2.2). Отметим, что данный выбор обусловлен тем, что эта модель, с одной стороны, является одной из лучших моделей турбулентности для решения задач внешней аэродинамики (см., например, “рейтинги” моделей в отчете по проекту FLOMANIA (*Flomania, 2006*)), а с другой, – содержит всего одно дифференциальное уравнение, что заметно упрощает построение базирующихся на ЛТУ алгоритмов определения условий устойчивости стационарных уравнений Рейнольдса.

Граничные условия к системе уравнений (1.1) на твердой поверхности включают условия прилипания и непроницаемости

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0, \quad (1.5)$$

и условие адиабатичности стенки

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial n} = 0, \quad (1.6)$$

где \bar{n} – внешняя нормаль к границе.

Кроме того, используется предположение о равенстве нулю производной от давления по нормали к стенке, которое вытекает из уравнения баланса импульса в проекции на нормаль к поверхности (*Андерсон и др., 1990*). С учетом этого предположения и условия адиабатичности нормальная производная от плотности также обращается в нуль

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = 0. \quad (1.7)$$

На внешних “проницаемых” границах расчетной области используются характеристические условия (*Hirsch, 1988*), формулируемые относительно инвариантов Римана, связь которых с основными переменными $\bar{p}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{T}$ определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{V}_n + \frac{2\bar{a}}{(\gamma-1)} = t_{11}\bar{u} + t_{12}\bar{v} + t_{13}\bar{w} + \frac{2}{(\gamma-1)}\sqrt{\gamma R\bar{T}/m}, \\ \bar{I}_2 &= \bar{V}_n - \frac{2\bar{a}}{(\gamma-1)} = t_{11}\bar{u} + t_{12}\bar{v} + t_{13}\bar{w} - \frac{2}{(\gamma-1)}\sqrt{\gamma R\bar{T}/m}, \\ \bar{I}_3 &= \bar{V}_{\tau_1} = t_{21}\bar{u} + t_{22}\bar{v} + t_{23}\bar{w}, \\ \bar{I}_4 &= \bar{V}_{\tau_2} = t_{31}\bar{u} + t_{32}\bar{v} + t_{33}\bar{w}, \\ \bar{I}_5 &= \frac{R\bar{T}}{m\bar{p}^{\gamma-1}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь $\bar{a} = \sqrt{\gamma R\bar{T}/m}$ - локальная скорость звука, $\gamma = C_p/(C_p - R/m)$ - показатель адиабаты, \bar{V}_n , \bar{V}_{τ_1} и \bar{V}_{τ_2} - нормальная и касательные проекции вектора скорости на границу области, а матрица t_{ij} является матрицей поворота (направляющих косинусов) между системой координат (x, y, z) и системой координат (n, τ_1, τ_2) , связанной с границей. Отметим, что в двумерном и квазитрехмерном случаях, рассматриваемых в настоящей работе, в силу ортогональности преобразования поворота

$$V_n = t_{11}u + t_{12}v, \quad V_{\tau_1} = t_{12}u - t_{11}v, \quad V_{\tau_2} = w. \quad (1.9)$$

Форма граничных условий на проницаемых границах зависит от знака нормальной компоненты скорости V_n , то есть от того втекает поток в расчетную область в рассматриваемой точке границы или вытекает из нее. Для рассматриваемых в данной работе течений, в которых нормальная к границе скорость не превышает скорости звука, соответствующие граничные условия ставятся следующим образом.

На «входных» участках границы ($V_n < 0$) значения инвариантов I_1, I_3, I_4 и I_5 определяются по известным параметрам набегающего потока, а инвариант I_2 линейно экстраполируется на границу из внутренних точек расчетной области (с математической точки зрения это эквивалентно постановке условия $\partial^2 I_2 / \partial n^2 = 0$). На «выходных» участках ($V_n > 0$), наоборот, инвариант I_2 задается, а значения инвариантов I_1, I_3, I_4 и I_5 определяются с помощью экстраполяции из внутренних точек расчетной области.

Рассмотрим далее систему *нестационарных* трехмерных уравнений Рейнольдса (URANS).

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \\
 & \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + \rho RT)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{xz}), \\
 & \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + \rho RT)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{yz}), \\
 & \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2 + \rho RT)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz}), \\
 & \frac{\partial(\rho C_v T + 0.5\rho(u^2 + v^2 + w^2))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u C_p T + 0.5\rho u(u^2 + v^2 + w^2))}{\partial x} + \\
 & + \frac{\partial(\rho v C_p T + 0.5\rho v(u^2 + v^2 + w^2))}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w C_p T + 0.5\rho w(u^2 + v^2 + w^2))}{\partial z} = \\
 & = \frac{\partial}{\partial x} \left(u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + \lambda_{eff} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + \lambda_{eff} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left(u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} + \lambda_{eff} \frac{\partial T}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \right. \quad (1.10)$$

где $C_v = (C_p - R/m)$ – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, а компоненты тензора напряжений определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= 2\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu_{eff} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{xy} &= \mu_{eff} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\
 \tau_{yy} &= 2\mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu_{eff} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \tau_{xz} &= \mu_{eff} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\
 \tau_{yz} &= \mu_{eff} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), & \tau_{zz} &= 2\mu_{eff} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu_{eff} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Для рассматриваемого в настоящей работе случая отсутствия “внешней” нестационарности граничные условия к системе (1.10) по форме совпадают с соответствующими условиями для стационарных уравнений Рейнольдса, представленными выше.

Следуя общему принципу ЛТУ, представим решение системы (1.10) $\mathbf{q} = \{\rho, u, v, w, T, v_t\}^T$ в малой окрестности стационарного решения $\bar{\mathbf{q}}$ квазитрехмерной системы (1.1) в виде суммы $\bar{\mathbf{q}}$ и малых возмущений \mathbf{q}' :

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}(x, y) + \mathbf{q}'(x, y, z, t). \quad (1.12)$$

Подставляя разложение (1.12) в систему (1.10) с учетом того, что $\bar{\mathbf{q}}$ удовлетворяет системе (1.1), а также используя допущение о малости возмущений \mathbf{q}' , то есть пренебрегая нелинейными относительно \mathbf{q}' членами, получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений относительно возмущений:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}u' + \rho'\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}v' + \rho'\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho}w' + \rho'\bar{w})}{\partial z} = 0 \\
& \frac{\partial(\bar{\rho}u' + \rho'\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho'\bar{u}^2 + 2\bar{\rho}\bar{u}u' + \bar{\rho}RT' + \rho'RT)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}v' + \bar{\rho}u'\bar{v} + \rho'\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}w' + \bar{\rho}u'\bar{w} + \rho'\bar{u}\bar{w})}{\partial z} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x}(\tau'_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau'_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau'_{xz}) \\
& \frac{\partial(\bar{\rho}v' + \rho'\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}v' + \bar{\rho}u'\bar{v} + \rho'\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho'\bar{v}^2 + 2\bar{\rho}\bar{v}v' + \bar{\rho}RT' + \rho'RT)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v}w' + \bar{\rho}v'\bar{w} + \rho'\bar{v}\bar{w})}{\partial z} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x}(\tau'_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau'_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau'_{yz}) \\
& \frac{\partial(\bar{\rho}w' + \rho'\bar{w})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}w' + \bar{\rho}u'\bar{w} + \rho'\bar{u}\bar{w})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v}w' + \bar{\rho}v'\bar{w} + \rho'\bar{v}\bar{w})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho'\bar{w}^2 + 2\bar{\rho}\bar{w}w' + \bar{\rho}RT' + \rho'RT)}{\partial z} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x}(\tau'_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau'_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau'_{zz}) \\
& \frac{\partial(\rho'(C_p\bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2))) + \bar{\rho}(C_pT' + \bar{u}u' + \bar{v}v' + \bar{w}w')}{\partial t} + \\
& + \frac{\partial((\bar{\rho}u' + \rho'\bar{u})(C_p\bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)) + \bar{\rho}u(C_pT' + \bar{u}u' + \bar{v}v' + \bar{w}w'))}{\partial x} + \\
& + \frac{\partial((\bar{\rho}v' + \rho'\bar{v})(C_p\bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)) + \bar{\rho}v(C_pT' + \bar{u}u' + \bar{v}v' + \bar{w}w'))}{\partial y} + \\
& + \frac{\partial((\bar{\rho}w' + \rho'\bar{w})(C_p\bar{T} + 0.5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)) + \bar{\rho}w(C_pT' + \bar{u}u' + \bar{v}v' + \bar{w}w'))}{\partial z} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left(u'\bar{\tau}_{xx} + v'\bar{\tau}_{xy} + w'\bar{\tau}_{xz} + \bar{u}\tau'_{xx} + \bar{v}\tau'_{xy} + \bar{w}\tau'_{xz} + \bar{\lambda}_{eff} \frac{\partial T'}{\partial x} + \lambda'_{eff} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(u'\bar{\tau}_{xy} + v'\bar{\tau}_{yy} + w'\bar{\tau}_{yz} + \bar{u}\tau'_{xy} + \bar{v}\tau'_{yy} + \bar{w}\tau'_{yz} + \bar{\lambda}_{eff} \frac{\partial T'}{\partial y} + \lambda'_{eff} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left(u'\bar{\tau}_{xz} + v'\bar{\tau}_{yz} + w'\bar{\tau}_{zz} + \bar{u}\tau'_{xz} + \bar{v}\tau'_{yz} + \bar{w}\tau'_{zz} + \bar{\lambda}_{eff} \frac{\partial T'}{\partial z} \right)
\end{aligned}
\tag{1.13}$$

ГДЕ

$$\begin{aligned}
\tau'_{xx} &= \bar{\mu}_{eff} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v'}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + (\rho' \bar{v}_t + \bar{\rho} v'_t) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right), \\
\tau'_{xy} &= \bar{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + (\rho' \bar{v}_t + \bar{\rho} v'_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right), \\
\tau'_{yy} &= \bar{\mu}_{eff} \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial v'}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + (\rho' \bar{v}_t + \bar{\rho} v'_t) \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right), \\
\tau'_{xz} &= \bar{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + (\rho' \bar{v}_t + \bar{\rho} v'_t) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right), \\
\tau'_{yz} &= \bar{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) + (\rho' \bar{v}_t + \bar{\rho} v'_t) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right), \\
\tau'_{zz} &= \bar{\mu}_{eff} \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + (\rho' \bar{v}_t + \bar{\rho} v'_t) \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right), \\
\lambda'_{eff} &= C_p \frac{(\rho' \bar{v}_t + \bar{\rho} v'_t)}{Pr_t}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Поскольку коэффициенты уравнения (1.13) не зависят от z и t , нестационарное возмущение $\mathbf{q}'(x, y, z, t)$ может быть представлено в следующей гармонической форме (см., например, *Линь, 1958*):

$$\begin{cases}
\rho' = \tilde{\rho} \cdot \exp(i[-\omega t + \beta z]) \\
u' = \tilde{u} \cdot \exp(i[-\omega t + \beta z]) \\
v' = \tilde{v} \cdot \exp(i[-\omega t + \beta z]) \\
w' = i\tilde{w} \cdot \exp(i[-\omega t + \beta z]) \\
T' = \tilde{T} \cdot \exp(i[-\omega t + \beta z]) \\
v'_t = \tilde{v}_t \cdot \exp(i[-\omega t + \beta z])
\end{cases} \tag{1.15}$$

Здесь вектор $\tilde{\mathbf{q}} = \{\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{T}, \tilde{v}_t\}^T$ представляет собой вектор амплитуд возмущений в плоскости (x, y) , ω - частота возмущений, параметр β определяет период решения вдоль направления z , а i - мнимая единица.

Следует отметить, что величины $\tilde{\mathbf{q}}$ и ω являются комплексными, а величина β , в силу ограниченности решения при $z = \pm\infty$ - вещественной. Отметим также, что амплитуда возмущений компоненты скорости w умножена на i для того, чтобы в случае $\bar{w} = 0$ (то есть при анализе устойчивости

двумерных стационарных решений) итоговая система линейных дифференциальных уравнений для амплитуд возмущений имела вещественные коэффициенты, что существенно уменьшает объем оперативной памяти необходимой для ее численного решения.

Подстановка выражений для возмущений (1.15) в систему уравнений (1.13) с учетом (1.14) позволяет получить следующую систему уравнений для возмущений:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned}
& -i\omega\tilde{\rho} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u} + \tilde{\rho}\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{v} + \tilde{\rho}\tilde{v})}{\partial y} - \beta\tilde{\rho}\tilde{w} + i\beta\tilde{\rho}\tilde{w} = 0 \\
& -i\omega(\tilde{\rho}\tilde{u} + \tilde{\rho}\tilde{u}) + \frac{\partial(\tilde{\rho}(\tilde{u}^2 + R\tilde{T}) + 2\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{u} + \tilde{\rho}R\tilde{T})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v})}{\partial y} + i\beta\tilde{w}(\tilde{\rho}\tilde{u} + \tilde{\rho}\tilde{u}) - \beta\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{w} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\mu}_{eff} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} \right) + \tilde{\mu}_{eff} \frac{\tilde{\tau}_{xx}}{\tilde{\mu}_{eff}} \right) + \beta \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{\mu}_{eff} \tilde{w}) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} \right) + \tilde{\mu}_{eff} \frac{\tilde{\tau}_{xy}}{\tilde{\mu}_{eff}} \right) - \\
& - \beta^2 \tilde{\mu}_{eff} \tilde{u} - \beta \tilde{\mu}_{eff} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial x} + i\beta \tilde{\mu}_{eff} \frac{\tilde{\tau}_{xz}}{\tilde{\mu}_{eff}} \\
& -i\omega(\tilde{\rho}\tilde{v} + \tilde{\rho}\tilde{v}) + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{\rho}(\tilde{v}^2 + R\tilde{T}) + 2\tilde{\rho}\tilde{v}\tilde{v} + \tilde{\rho}R\tilde{T})}{\partial y} + i\beta\tilde{w}(\tilde{\rho}\tilde{v} + \tilde{\rho}\tilde{v}) - \beta\tilde{\rho}\tilde{v}\tilde{w} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} \right) + \tilde{\mu}_{eff} \frac{\tilde{\tau}_{xy}}{\tilde{\mu}_{eff}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{\mu}_{eff} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} \right) + \tilde{\mu}_{eff} \frac{\tilde{\tau}_{yy}}{\tilde{\mu}_{eff}} \right) + \beta \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{\mu}_{eff} \tilde{w}) - \\
& - \beta^2 \tilde{\mu}_{eff} \tilde{v} - \beta \tilde{\mu}_{eff} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial y} + i\beta \tilde{\mu}_{eff} \frac{\tilde{\tau}_{yz}}{\tilde{\mu}_{eff}} \\
& -i\omega(i\tilde{\rho}\tilde{w} + \tilde{\rho}\tilde{w}) + \frac{\partial(i\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{w} + \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{w} + \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{w})}{\partial x} + \frac{\partial(i\tilde{\rho}\tilde{v}\tilde{w} + \tilde{\rho}\tilde{v}\tilde{w} + \tilde{\rho}\tilde{v}\tilde{w})}{\partial y} + i\beta\tilde{\rho}\tilde{w}^2 - 2\beta\tilde{\rho}\tilde{w}\tilde{w} + i\beta R(\tilde{\rho}\tilde{T} + \tilde{\rho}\tilde{T}) = \\
& = i\beta \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{\mu}_{eff} \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(i\tilde{\mu}_{eff} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial x} + \tilde{\mu}_{eff} \frac{\tilde{\tau}_{xz}}{\tilde{\mu}_{eff}} \right) + i\beta \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{\mu}_{eff} \tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial y} \left(i\tilde{\mu}_{eff} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial y} + \tilde{\mu}_{eff} \frac{\tilde{\tau}_{yz}}{\tilde{\mu}_{eff}} \right) \\
& - i \frac{4}{3} \beta^2 \tilde{\mu}_{eff} \tilde{w} - i \frac{2}{3} \beta \tilde{\mu}_{eff} \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} \right) + i\beta \tilde{\mu}_{eff} \frac{\tilde{\tau}_{zz}}{\tilde{\mu}_{eff}} \\
& -i\omega(\tilde{\rho}(C_p\tilde{T} + 0.5(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2))) + \tilde{\rho}(C_p\tilde{T} + \tilde{u}\tilde{u} + \tilde{v}\tilde{v} + i\tilde{w}\tilde{w})) + \\
& + \frac{\partial((\tilde{\rho}\tilde{u} + \tilde{\rho}\tilde{u})(C_p\tilde{T} + 0.5(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2))) + \tilde{\rho}\tilde{u}(C_p\tilde{T} + \tilde{u}\tilde{u} + \tilde{v}\tilde{v} + i\tilde{w}\tilde{w})}{\partial x} + \\
& + \frac{\partial((\tilde{\rho}\tilde{v} + \tilde{\rho}\tilde{v})(C_p\tilde{T} + 0.5(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2))) + \tilde{\rho}\tilde{v}(C_p\tilde{T} + \tilde{u}\tilde{u} + \tilde{v}\tilde{v} + i\tilde{w}\tilde{w})}{\partial y} + \\
& + \beta((i\tilde{\rho}\tilde{w} - \tilde{\rho}\tilde{w})(C_p\tilde{T} + 0.5(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2))) + \tilde{\rho}\tilde{w}(iC_p\tilde{T} + i\tilde{u}\tilde{u} + i\tilde{v}\tilde{v} - \tilde{w}\tilde{w}) = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left[\tilde{\mu}_{eff} \tilde{u} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} + \frac{2}{3} \beta\tilde{w} \right) + \tilde{\mu}_{eff} \tilde{v} \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} \right) + \tilde{\mu}_{eff} \tilde{w} \left(i\beta\tilde{u} + i \frac{\partial\tilde{w}}{\partial x} \right) + \right. \\
& \left. + \left(\tilde{u} \frac{\tilde{\mu}_{eff}}{\tilde{\mu}_{eff}} + \tilde{u} \right) \tilde{\tau}_{xx} + \left(\tilde{v} \frac{\tilde{\mu}_{eff}}{\tilde{\mu}_{eff}} + \tilde{v} \right) \tilde{\tau}_{xy} + \left(\tilde{w} \frac{\tilde{\mu}_{eff}}{\tilde{\mu}_{eff}} + i\tilde{w} \right) \tilde{\tau}_{xz} + \tilde{\lambda}_{eff} \frac{\partial\tilde{T}}{\partial x} + \tilde{\lambda}_{eff} \frac{\partial\tilde{T}}{\partial x} \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[\tilde{\mu}_{eff} \tilde{u} \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} \right) + \tilde{\mu}_{eff} \tilde{v} \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} + \frac{2}{3} \beta\tilde{w} \right) + \tilde{\mu}_{eff} \tilde{w} \left(i\beta\tilde{v} + i \frac{\partial\tilde{w}}{\partial y} \right) + \right. \\
& \left. + \left(\tilde{u} \frac{\tilde{\mu}_{eff}}{\tilde{\mu}_{eff}} + \tilde{u} \right) \tilde{\tau}_{xy} + \left(\tilde{v} \frac{\tilde{\mu}_{eff}}{\tilde{\mu}_{eff}} + \tilde{v} \right) \tilde{\tau}_{yy} + \left(\tilde{w} \frac{\tilde{\mu}_{eff}}{\tilde{\mu}_{eff}} + i\tilde{w} \right) \tilde{\tau}_{yz} + \tilde{\lambda}_{eff} \frac{\partial\tilde{T}}{\partial y} + \tilde{\lambda}_{eff} \frac{\partial\tilde{T}}{\partial y} \right] - \\
& - \beta^2 \tilde{\mu}_{eff} \left(\tilde{u}\tilde{u} + \tilde{v}\tilde{v} + \frac{4}{3} i\tilde{w}\tilde{w} \right) - \beta \tilde{\mu}_{eff} \left(\tilde{u} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} i\beta \tilde{\mu}_{eff} \tilde{w} \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} \right) + \\
& + i\beta \left(\tilde{u} \frac{\tilde{\mu}_{eff}}{\tilde{\mu}_{eff}} + \tilde{u} \right) \tilde{\tau}_{xz} + i\beta \left(\tilde{v} \frac{\tilde{\mu}_{eff}}{\tilde{\mu}_{eff}} + \tilde{v} \right) \tilde{\tau}_{yz} + i\beta \left(\tilde{w} \frac{\tilde{\mu}_{eff}}{\tilde{\mu}_{eff}} + i\tilde{w} \right) \tilde{\tau}_{zz} - \beta^2 \tilde{\lambda}_{eff} \tilde{T}
\end{aligned} \right. \quad , (1.16)
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{\mu}_{eff} = (\bar{\rho}\tilde{v}_t + \tilde{\rho}\bar{v}_t), \quad \tilde{\lambda}_{eff} = C_p \frac{(\bar{\rho}\tilde{v}_t + \tilde{\rho}\bar{v}_t)}{Pr_t}. \quad (1.17)$$

Система уравнений (1.16) может быть представлена в следующей операторной форме:

$$-i\omega W \cdot \tilde{\mathbf{q}} + M(\bar{\mathbf{q}}, \beta) \cdot \tilde{\mathbf{q}} = 0, \quad (1.18)$$

где матрица W и дифференциальный оператор M (вещественные при $\bar{w} = 0$ и комплексные в общем случае) зависят только от базового стационарного решения (не зависят от вектора амплитуд возмущений).

Граничные условия на твердой поверхности к уравнениям для возмущений можно легко получить путем линеаризации соответствующих граничных условий для нестационарных уравнений Рейнольдса после представления основных переменных в виде суммы стационарного решения и малых возмущений (1.10) с использованием гармонической формы возмущений (1.15).

Полученные таким образом граничные условия для амплитуд возмущений на твердой стенке имеют вид

$$\tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = 0, \quad (1.19)$$

а выражения для возмущений инвариантов Римана (1.8) принимают форму

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= t_{11}\tilde{u} + t_{12}\tilde{v} + \frac{\sqrt{\gamma R}}{(\gamma-1)\sqrt{m\bar{T}}} \tilde{T}, \\ \tilde{I}_2 &= t_{11}\tilde{u} + t_{12}\tilde{v} - \frac{\sqrt{\gamma R}}{(\gamma-1)\sqrt{m\bar{T}}} \tilde{T}, \\ \tilde{I}_3 &= t_{12}\tilde{u} - t_{11}\tilde{v}, \\ \tilde{I}_4 &= \tilde{w}, \\ \tilde{I}_5 &= R \left(\frac{\tilde{T}}{\bar{\rho}^{\gamma-1}} - (\gamma-1) \frac{\tilde{T}\bar{\rho}}{\bar{\rho}^\gamma} \right), \end{aligned} \quad (1.20)$$

после чего граничные условия для возмущений на *входных* и *выходных* участках проницаемой границы расчетной области можно записать следующим образом

$$\tilde{I}_1 = \tilde{I}_3 = \tilde{I}_4 = \tilde{I}_5 = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{I}_2}{\partial n^2} = 0, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{I}_1}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 \tilde{I}_3}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 \tilde{I}_4}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 \tilde{I}_5}{\partial n^2} = 0, \quad \tilde{I}_2 = 0. \quad (1.22)$$

Система уравнений (1.18) в сочетании с граничными условиями (1.19)-(1.22) представляет собой обобщенную задачу на собственные значения для линейного дифференциального оператора, метод решения которой будет рассмотрен в разделах (1.2.3) – (1.2.5).

1.2.2. Линеаризация уравнения переноса турбулентной вязкости.

Для замыкания полученной в предыдущем разделе системы уравнений для амплитуд возмущений к ней необходимо добавить уравнение для амплитуды возмущений турбулентной вязкости $\tilde{\nu}_t$.

Как уже отмечалось, в настоящей работе для вычисления турбулентной вязкости использовалась модель Спаларта-Аллмареса (*Spalart, Allmaras, 1992*). В рамках этой модели турбулентная вязкость определяется из следующего дифференциального уравнения переноса величины ν_{SA} (в оригинальной работе эта величина обозначается через $\tilde{\nu}$, но поскольку в настоящей работе «волной» обозначены амплитуды возмущений это обозначение было изменено):

$$\begin{aligned} \frac{D\nu_{SA}}{Dt} = \frac{1}{\sigma} \left([\nabla \cdot ((\mathbf{v} + \mathbf{v}_{SA}) \nabla \nu_{SA})] + C_{b2} [(\nabla \nu_{SA}) \cdot (\nabla \nu_{SA})] \right) + \\ + C_{b1} (1 - f_{t2}) S \nu_{SA} - \left(C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\nu_{SA}}{d} \right)^2 + f_{t1} |\vec{U}|^2 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Связь между переменной ν_{SA} и турбулентной кинематической вязкостью ν_t определяется соотношением

$$v_t = f_{v1} v_{SA}, \quad (1.24)$$

где функция $f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}}$, а величина χ определена как $\chi = \frac{v_{SA}}{v}$.

Остальные функции, входящие в (1.23) определяются следующим образом:

$$S = \Omega + f_{v2} \frac{v_{SA}}{\kappa^2 d^2}, f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}},$$

$$f_w = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}}, g = r + C_{w2} (r^6 - r), r = \frac{v_{SA}}{S \kappa^2 d^2}, \quad (1.25)$$

$$f_{t2} = C_{t3} \cdot \exp(-C_{t4} \chi^2),$$

а член f_{t1} , введенный в уравнение для инициирования ламинарно-турбулентного перехода в заданной точке на поверхности обтекаемого тела (“trip-term”) имеет вид:

$$f_{t1} = C_{t1} g_t \exp \left(-C_{t2} \frac{\omega_t^2}{|\vec{U}|^2} (d^2 + g_t^2 d_t^2) \right), g_t = \min(0.1, |\vec{U}| / \omega_{trip} \cdot \Delta x_{trip}), \quad (1.26)$$

$$d_t^2 = (z - z_{trip})^2 + (y - y_{trip})^2 + (x - x_{trip})^2,$$

где d – расстояние от рассматриваемой точки потока до твердой поверхности, $(x_{trip}, y_{trip}, z_{trip})$ – заданные координаты точки перехода, Δx_{trip} - шаг сетки вдоль стенки в точке перехода, ω_{trip} - завихренность на стенке в точке перехода, а $|\vec{U}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ - локальная скорость.

Эмпирические константы модели Спаларта-Аллмараса равны:

$$\kappa = 0.41, \sigma = \frac{2}{3}, C_{b1} = 0.1355, C_{b2} = 0.622,$$

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + C_{b2})}{\sigma}, C_{w2} = 0.3, C_{w3} = 2, \quad (1.27)$$

$$C_{v1} = 7.1, C_{t1} = 1, C_{t2} = 2, C_{t3} = 1.2, C_{t4} = 0.5.$$

При решении задач внешнего обтекания для уравнения (1.23) в работе использовались следующие граничные условия: на твердой стенке задавалось $v_{SA} = 0$, на входной границе задавалось значение, соответствующее $v_t = 10^{-3} \nu$ (ν – кинематическая вязкость), а на выходной – линейная экстраполяция v_{SA} .

К сожалению, строгая линеаризация модели (1.23)-(1.26) невозможна, поскольку функция f_{t1} не является дифференцируемой. Однако, учитывая то, что положение точки перехода в рамках этой модели является фиксированным, можно считать, что возмущения последнего члена уравнения (1.23) не сказываются на устойчивости стационарного решения и проводить его линеаризацию нет необходимости. В результате может быть получено следующее линейное уравнение для возмущений величины v_{SA} :

$$\begin{aligned}
& -i\omega \tilde{v}_{SA} + \frac{\partial \bar{v}_{SA}}{\partial x} \tilde{u} + \frac{\partial \bar{v}_{SA}}{\partial y} \tilde{v} + \bar{u} \frac{\partial \tilde{v}_{SA}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \tilde{v}_{SA}}{\partial y} + i\beta \bar{w} \tilde{v}_{SA} = \\
& = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{v}_{SA}}{\partial x} \left(\tilde{v}_{SA} - \frac{\nu}{\bar{\rho}} \tilde{\rho} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{v}_{SA}}{\partial y} \left(\tilde{v}_{SA} - \frac{\nu}{\bar{\rho}} \tilde{\rho} \right) \right) + \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial x} \left((\nu + \bar{v}_{SA}) \frac{\partial \tilde{v}_{SA}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \bar{v}_{SA}) \frac{\partial \tilde{v}_{SA}}{\partial y} \right) - \beta^2 (\nu + \bar{v}_{SA}) \tilde{v}_{SA} + \right. \\
& \left. + 2C_{b2} \left(\frac{\partial \bar{v}_{SA}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{v}_{SA}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_{SA}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{v}_{SA}}{\partial y} \right) \right) + C_{b1} (1 - \bar{f}_{t2a}) \bar{S} \tilde{v}_{SA} + C_{b1} (1 - \bar{f}_{t2}) \bar{v}_{SA} \cdot \tilde{S} \\
& - \left(C_{w1} \bar{f}_w - \frac{C_{b1} \bar{f}_{t2b}}{\kappa^2} \right) \left(\frac{2\bar{v}_{SA} \tilde{v}_{SA}}{d^2} \right) - C_{w1} \bar{\Phi}_w \left(\frac{\bar{v}_{SA}}{d} \right)^2 \left(\frac{\tilde{v}_{SA}}{\bar{v}_{SA}} - \frac{\tilde{S}}{\bar{S}} \right).
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Линеаризация выражения (1.24) приводит к следующему соотношению

$$\bar{v}_t = \bar{f}_{v1} \bar{v}_{SA}; \tilde{v}_t = \bar{f}_{v1a} \tilde{v}_{SA},$$

где

$$\bar{f}_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}; \quad \bar{f}_{v1a} = \bar{f}_{v1} + \chi \frac{\partial \bar{f}_{v1}}{\partial \chi} = \bar{f}_{v1} + \frac{3\chi^3 C_{v1}^3}{(\chi^3 + C_{v1}^3)^2}, \tag{1.29}$$

а линеаризация входящих в (1.23) функций (1.25) дает

$$\bar{\Omega} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right)^2}$$

$$\bar{S} = \bar{\Omega} + \frac{\bar{f}_{v2} \bar{v}_{SA}}{\kappa^2 d^2}, \quad (1.30)$$

$$\tilde{S} = \frac{1}{\bar{\Omega}} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right) + i \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} - \beta \tilde{u}\right) + i \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} - \beta \tilde{v}\right) \right] + \frac{\bar{f}_{v2a} \tilde{v}_{SA}}{\kappa^2 d^2}.$$

$$\bar{f}_w = \bar{g} \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{\bar{g}^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad \bar{g} = \bar{r} + C_{w2} (\bar{r}^6 - \bar{r}), \quad \bar{r} = \frac{\bar{v}_{SA}}{\kappa^2 d^2 \bar{S}},$$

$$\bar{\varphi}_w = \frac{\partial \bar{f}_w}{\partial \bar{g}} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{r}} \cdot \bar{r} = \frac{C_{w3}^6}{\bar{g}^6 + C_{w3}^6} \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{\bar{g}^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6} \cdot (\bar{r} + C_{w2} (6\bar{r}^6 - \bar{r})),$$

$$\bar{f}_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi \bar{f}_{v1}}, \quad \chi = \frac{\bar{v}_{SA}}{v};$$

$$\bar{f}_{v2a} = \bar{f}_{v2} + \chi \frac{\partial \bar{f}_{v2}}{\partial \chi} = \bar{f}_{v2} + \frac{\chi(\chi(\bar{f}_{v1a} - \bar{f}_{v1}) - 1)}{(1 + \chi \bar{f}_{v1})^2}, \quad (1.31)$$

$$\bar{f}_{i2} = C_{i3} \cdot \exp(-C_{i4} \chi^2);$$

$$\bar{f}_{i2a} = \bar{f}_{i2} + \chi \frac{\partial \bar{f}_{i2}}{\partial \chi} = \bar{f}_{i2} (1 - 2C_{i4} \chi^2);$$

$$\bar{f}_{i2b} = \bar{f}_{i2} + \frac{1}{2} \chi \frac{\partial \bar{f}_{i2}}{\partial \chi} = \bar{f}_{i2} (1 - C_{i4} \chi^2)$$

Как видно из приведенных соотношений, в силу сложного нелинейного характера уравнения переноса турбулентной вязкости (точнее, связанной с ней величины v_{SA}), линейное уравнение для возмущений этой величины также оказывается весьма сложным, что значительно затрудняет решение задачи устойчивости. В связи с этим возникает вопрос о том, насколько существенным является влияние возмущений турбулентной вязкости на устойчивость стационарного решения или, иными словами, нельзя ли пренебречь этим влиянием. Для того чтобы получить ответ на этот вопрос в настоящей работе, наряду с описанной выше максимально полной формой линеаризации уравнения для возмущений v_{SA} , были рассмотрены две более простые формы этого уравнения.

При получении первой из них предполагается, что величина v_{SA} является “замороженной”, то есть ее возмущения полагаются равными нулю:

$$\tilde{v}_{SA} = 0. \quad (1.32)$$

Вторая, промежуточная, форма линеаризованного уравнения для возмущений v_{SA} базируется на менее сильном допущении, которое состоит в том, что функции f_{v1} , f_{v2} и f_{t2} , введенные в модель Спаларта-Аллмараса для описания так называемых низкорейнольдсовых эффектов, не оказывают существенного влияния на устойчивость стационарного решения. Иными словами, предполагается, что

$$\bar{f}_{v1a} = \bar{f}_{v1} \text{ и } \bar{f}_{v2} = \bar{f}_{v2a} = \bar{f}_{t2} = \bar{f}_{t2a} = \bar{f}_{t2b} = 0.$$

Кроме того, в этом случае в уравнении для возмущений можно пренебречь членами, содержащими молекулярную вязкость. В результате уравнение для возмущений v_{SA} принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & -i\omega\tilde{v}_{SA} + \frac{\partial\bar{v}_{SA}}{\partial x}\tilde{u} + \frac{\partial\bar{v}_{SA}}{\partial y}\tilde{v} + \bar{u}\frac{\partial\tilde{v}_{SA}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\tilde{v}_{SA}}{\partial y} + i\beta\bar{w}\tilde{v}_{SA} = \\ & = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar{v}_{SA}}{\partial x}\tilde{v}_{SA}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\bar{v}_{SA}}{\partial y}\tilde{v}_{SA}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{v}_{SA}\frac{\partial\tilde{v}_{SA}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{v}_{SA}\frac{\partial\tilde{v}_{SA}}{\partial y}\right) - \beta^2\bar{v}_{SA}\tilde{v}_{SA} + \right. \\ & \left. + 2C_{b2}\left(\frac{\partial\bar{v}_{SA}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{v}_{SA}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{v}_{SA}}{\partial y}\frac{\partial\tilde{v}_{SA}}{\partial y}\right)\right) + C_{b1}\bar{S}\tilde{v}_{SA} + C_{b1}\bar{v}_{SA}\cdot\tilde{S} \\ & - C_{w1}\bar{f}_w\left(\frac{2\bar{v}_{SA}\tilde{v}_{SA}}{d^2}\right) - C_{w1}\bar{\Phi}_w\left(\frac{\bar{v}_{SA}}{d}\right)^2\left(\frac{\tilde{v}_{SA}}{\bar{v}_{SA}} - \frac{\tilde{S}}{\bar{S}}\right). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Следует отметить, что граничные условия для возмущений \tilde{v}_{SA} были получены путем линеаризации соответствующих граничных условий для v_{SA} .

1.2.3. Дискретизация уравнений.

Коэффициенты обобщенной задачи на собственные значения дифференциального оператора, сформулированной в разделах 1.2.1, 1.2.2, зависят от решения стационарных уравнений \bar{q} . Поскольку это решение получается численно на некоторой разностной сетке, решение задачи на

собственные значения естественно проводить на той же самой сетке. Для описания используемого способа дискретизации удобно ввести некоторые специальные обозначения и определения.

Рассмотрим произвольную двумерную одноблочную структурированную сетку с общим числом узлов $N_p = N_i \times N_j$, где N_i и N_j число узлов по линиям семейств i и j соответственно и введем следующую одномерную (“глобальную”) нумерацию узлов:

$$n = N_j(i-1) + j, \quad (1.34)$$

где

$$n = 1, \dots, N_p, \quad i = 1, \dots, N_i, \quad j = 1, \dots, N_j.$$

С использованием такой нумерации дискретный аналог поля амплитуд возмущений может быть записан в виде следующего вектора

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}} &= [\tilde{q}_{11}, \tilde{q}_{12}, \dots, \tilde{q}_{1N_j}, \dots, \tilde{q}_{N_i N_j}]^T \equiv \\ &\equiv [\tilde{\rho}_{11}, \tilde{u}_{11}, \tilde{v}_{11}, \tilde{T}_{11}, \tilde{v}_{111}, \dots, \tilde{\rho}_{1N_j}, \tilde{u}_{1N_j}, \tilde{v}_{1N_j}, \tilde{T}_{1N_j}, \tilde{v}_{11N_j}, \dots, \tilde{\rho}_{N_i N_j}, \tilde{u}_{N_i N_j}, \tilde{v}_{N_i N_j}, \tilde{T}_{N_i N_j}, \tilde{v}_{1N_i N_j}]^T \equiv, \quad (1.35) \\ &\equiv [\tilde{\rho}_1, \tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{T}_1, \tilde{v}_{11}, \dots, \tilde{\rho}_n, \tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{T}_n, \tilde{v}_{1n}, \dots, \tilde{\rho}_{N_p}, \tilde{u}_{N_p}, \tilde{v}_{N_p}, \tilde{T}_{N_p}, \tilde{v}_{1N_p}]^T \end{aligned}$$

имеющего размерность $N_V = n_{\text{var}} \times N_p$ (n_{var} – количество основных переменных, относительно которых решаются уравнения Рейнольдса совместно с моделью турбулентности или уравнения Навье-Стокса).

С использованием этих определений, независимо от конкретных способов аппроксимации системы дифференциальных уравнений (1.18), (1.28)-(1.31) и соответствующих линеаризованных граничных условий (1.19) – (1.22) (эти способы будут рассмотрены ниже), их дискретные аналоги можно представить в виде следующей обобщенной задачи на собственные значения для матрицы S , представляющей собой дискретный аналог линейного дифференциального оператора $M(\bar{\mathbf{q}}, 0)$ в уравнении (1.18) с соответствующими граничными условиями

$$(-i\omega T + S) \cdot \tilde{\mathbf{a}} = 0. \quad (1.36)$$

Отметим, что матрицы T и S имеют размерность $N_V \times N_V$ и не зависят от вектора амплитуд возмущений (являются функциями только базового решения, полученного на рассматриваемой расчетной сетке).

Представленная формулировка дискретной задачи на собственные значения может быть легко обобщена на случай использования многоблочных сеток, которые часто используются при получении стационарных решений уравнений Навье-Стокса и Рейнольдса для сложных течений. Для этого следует ввести глобальную нумерацию узлов сетки для всех блоков:

$$n = \sum_{k=1}^{n_b-1} N_p^{(k)} + N_j^{(n_b)}(i-1) + j, \quad (1.37)$$

где $N_p^{(n_b)} = N_i^{(n_b)} \times N_j^{(n_b)}$, $i = 1, \dots, N_i^{(n_b)}$, $j = 1, \dots, N_j^{(n_b)}$, $n_b = 1, \dots, N_b$, где N_b – количество блоков в сетке.

В случае перекрывающихся многоблочных сеток как при получении стационарного решения, так и при решении задачи на собственные значения на границах блоков используются граничные условия первого рода, которые получаются путем интерполяции переменных внутри одного блока на граничные точки другого блока. Формально граничные условия на межблочной границе с использованием глобальной нумерации (1.37) могут быть записаны в следующем виде:

$$\tilde{a}_{i_b^{(n_{b1})}} = \sum_{i_b^{(n_{b2})}} \beta_{i_b^{(n_{b2})}} \tilde{a}_{i_b^{(n_{b2})}}, \quad (1.38)$$

где индекс $i_b^{(n_{b2})}$ относится к точкам блока n_{b2} , участвующим в интерполяции при определении величины \tilde{a} в граничной точке $i_b^{(n_{b1})}$ блока n_{b1} , а $\beta_{i_b^{(n_{b2})}}$ – соответствующие интерполяционные коэффициенты.

Для вычисления элементов матрицы S необходимо выбрать конкретную разностную аппроксимацию производных, входящих в дифференциальный оператор $M(\bar{q}, \beta)$. В настоящей работе для этой цели использовалась та же схема, что и схема, используемая при решении стационарных уравнений. Такой выбор продиктован тем, что при получении уравнений для возмущений

предполагается, что при подстановке в нестационарные уравнения суммы стационарного решения и малых возмущений, часть членов полученной системы, отвечающих стационарному решению, тождественно обращается в ноль. Ясно, что для того, чтобы это выполнялось также в дискретной форме, при аппроксимации стационарных и нестационарных уравнений, и, следовательно, при аппроксимации дифференциального оператора $M(\bar{\mathbf{q}}, \beta)$ необходимо использовать одну и ту же схему.

В настоящей работе для решения стационарных уравнений используется NTS код (*Shur et al., 2004*), который прошел широкую проверку на примере расчета самых разнообразных ламинарных и турбулентных стационарных и нестационарных течений. В нем используется неявный по времени метод конечных объемов, реализованный на структурированных многоблочных перекрывающихся сетках. Разностная аппроксимация уравнений движения основана на схеме расщепления потоков Роу (*Roe, 1981*) третьего порядка точности с использованием ограничителей (*van Leer, 1985*) для невязких составляющих векторов потоков и на симметричной схеме 2-го порядка – для вязких составляющих. В силу нелинейности схемы Роу при аппроксимации конвективных членов уравнений для возмущений использовалась схема, противопоточная составляющая которой определялась по знаку компоненты скорости базового решения, направленной по нормали к грани ячейки. Рассмотрим эту схему подробнее.

Поскольку система уравнений для возмущений является линейной, ее конвективные члены могут быть записаны следующим образом:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(A(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \tilde{\mathbf{q}}) + \frac{\partial}{\partial y}(B(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \tilde{\mathbf{q}}). \quad (1.39)$$

Переходя к криволинейной системе координат (s, n) линии которой совпадают с линиями расчетной сетки, получим:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) = J \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial s} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial n} \right). \quad (1.40)$$

Здесь J – Якобиан преобразования координат:

$$J = \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial s}{\partial y} \cdot \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (1.41)$$

Обобщенные конвективные потоки \widehat{F} и \widehat{G} определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \widehat{F} &= X_n F + Y_n G = (X_n A(\bar{\mathbf{q}}) + Y_n B(\bar{\mathbf{q}})) \cdot \tilde{\mathbf{q}} = \widehat{A}(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \tilde{\mathbf{q}}, \\ \widehat{G} &= X_s F + Y_s G = (X_s A(\bar{\mathbf{q}}) + Y_s B(\bar{\mathbf{q}})) \cdot \tilde{\mathbf{q}} = \widehat{B}(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \tilde{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

в которых метрические коэффициенты X_n, Y_n, X_s, Y_s вычисляются по формулам

$$X_n = \frac{\partial y}{\partial n}, Y_n = -\frac{\partial x}{\partial n}, X_s = -\frac{\partial y}{\partial s}, Y_s = \frac{\partial x}{\partial s}. \quad (1.43)$$

Конечно-разностное представление выражения (1.40) для конвективных членов в криволинейных координатах имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{F}}{\partial s} + \frac{\partial \widehat{G}}{\partial n} &= \widehat{F}_{i+1/2,j} - \widehat{F}_{i-1/2,j} + \widehat{G}_{i,j+1/2} - \widehat{G}_{i,j-1/2} = \\ &= \widehat{A}(\bar{\mathbf{q}})_{i+1/2,j} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2,j} - \widehat{A}(\bar{\mathbf{q}})_{i-1/2,j} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{i-1/2,j} + \\ &+ \widehat{B}(\bar{\mathbf{q}})_{i,j+1/2} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{i,j+1/2} - \widehat{B}(\bar{\mathbf{q}})_{i,j-1/2} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{i,j-1/2}, \end{aligned} \quad (1.44)$$

а входящие в них значения потоков на гранях ячеек зависят от используемой схемы. Так, для центрально-разностной схемы они определяются соотношением

$$\widehat{A}(\bar{\mathbf{q}})_{i+1/2,j} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2,j} = 0.5(\widehat{A}_{i+1/2,j}^+ \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2,j}^+ + \widehat{A}_{i+1/2,j}^- \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2,j}^-), \quad (1.45)$$

а для противопоточной – соотношением

$$\widehat{A}(\bar{\mathbf{q}})_{i+1/2,j} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2,j} = \frac{1 - \text{sign}(\bar{u}_s)_{i+1/2,j}}{2} \widehat{A}_{i+1/2,j}^+ \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2,j}^+ + \frac{1 + \text{sign}(\bar{u}_s)_{i+1/2,j}}{2} \widehat{A}_{i+1/2,j}^- \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2,j}^-, \quad (1.46)$$

где \bar{u}_s – нормальная к грани ячейки компонента скорости базового стационарного решения:

$$\bar{u}_s = X_n \bar{u} + Y_n \bar{v}. \quad (1.47)$$

Порядок аппроксимации конвективных членов зависит от способа интерполяции вектора $\tilde{\mathbf{q}}$ и матрицы \hat{A} на грань ячейки. Для противопоточной схемы 3-го порядка и центрально-разностной схемы 4-го порядка, которые использовались в данной работе, $\tilde{\mathbf{q}}$ и \hat{A} определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2,j}^- &= \sum_{l=i-1}^{i+1} \alpha_l^- \tilde{\mathbf{q}}_{l,j}, \\ \tilde{\mathbf{q}}_{i+1/2,j}^+ &= \sum_{l=i}^{i+2} \alpha_l^+ \tilde{\mathbf{q}}_{l,j}, \\ \hat{A}_{i+1/2,j}^- &= \sum_{l=i-1}^{i+1} \alpha_l^- \hat{A}_{l,j}, \\ \hat{A}_{i+1/2,j}^+ &= \sum_{l=i}^{i+2} \alpha_l^+ \hat{A}_{l,j}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

где

$$\alpha_{i-1}^- = \alpha_{i+2}^+ = -1/6, \quad \alpha_i^- = \alpha_{i+1}^+ = 5/6, \quad \alpha_{i+1}^- = \alpha_i^+ = 1/3. \quad (1.49)$$

Отметим в заключение, что для снижения численной диссипации, связанной с использованием противопоточной схемы, в большинстве расчетов применялась “гибридная” схема, представляющая собой взвешенную сумму противопоточной и центрально-разностной аппроксимаций:

$$\Delta_H = \alpha_H \Delta_{3u} + (1 - \alpha_H) \Delta_{4c}, \quad 0 \leq \alpha_H \leq 1, \quad (1.50)$$

где конечно-разностные операторы Δ_{3u} и Δ_{4c} соответствуют противопоточной аппроксимации 3-го порядка и центрально-разностной аппроксимации 4-го порядка, а α_H – вес противопоточной схемы, который может изменяться в пределах от 0 до 1.

1.2.4. Приведение обобщенной задачи на собственные значения к стандартной задаче.

Сформулированная в предыдущем разделе обобщенная дискретная задача на собственные значения (1.36) может быть решена непосредственно. Однако значительно удобнее предварительно свести ее к стандартной задаче на собственные значения, поскольку спектр доступных методов решения таких задач гораздо шире (Голуб, Ван Лоун, 1999).

Для приведения к стандартному виду самих дифференциальных уравнений необходимо умножить систему (1.18) слева на матрицу

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{u}}{\bar{\rho}} & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{v}}{\bar{\rho}} & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 & 0 \\ i\frac{\bar{w}}{\bar{\rho}} & 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\rho}} & 0 \\ -\frac{\bar{T}}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2C_v\bar{\rho}} & -\frac{\bar{u}}{C_v\bar{\rho}} & -\frac{\bar{v}}{C_v\bar{\rho}} & -i\frac{\bar{w}}{C_v\bar{\rho}} & \frac{1}{C_v\bar{\rho}} \end{pmatrix}. \quad (1.51)$$

В результате система уравнений для возмущений принимает вид:

$$-i\omega\tilde{\mathbf{q}} + L(\bar{\mathbf{q}}, \beta') \cdot \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (1.52)$$

где $L(\bar{\mathbf{q}}, \beta')$ – линейный дифференциальный оператор второго порядка (отметим, что на практике данное преобразование осуществляется уже после дискретизации уравнений).

Несколько сложнее обстоит дело с приведением к стандартной форме граничных условий. Это связано с отсутствием в них производных по времени, в результате чего линеаризованные граничные условия (1.19)-(1.22) не содержат слагаемых с множителем $i\omega$, появляющемся при дифференцировании по времени гармонического представления (1.15).

Рассмотрим некоторую точку расчетной области, принадлежащую границе и имеющую номер i в глобальной нумерации (1.37). Конечно-разностная форма граничных условий для этой точки может быть представлена в виде:

$$C_{nk}^i(\tilde{q}_k)_i = D_{nk}^j(\tilde{q}_k)_j, k = 1, n_{\text{var}}, n = 1, n_{\text{var}}, \quad (1.53)$$

где $j \neq i$ – номера внутренних узлов, входящих в запись граничного условия, n – номер граничного условия, а \tilde{q}_k – компоненты вектора $\tilde{\mathbf{q}} = \{\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{T}, \tilde{v}_i\}^T$.

Следует отметить, что для любых корректно поставленных граничных условий выполняется условие

$$\det(C_{nk}^i) \neq 0, \quad (1.54)$$

что позволяет провести их диагонализацию относительно переменных в точке i . С учетом этого граничные условия (1.53) могут быть записаны следующим образом

$$(\tilde{q}_k)_i = \tilde{D}_{nk}^j(\tilde{q}_k)_j, k = 1, n_{\text{var}}, n = 1, n_{\text{var}} \quad (1.55)$$

Выражение (1.55) легко приводится к необходимому для формулировки стандартной задачи на собственные значения виду путем умножения на $i\omega$ и подстановки в правую часть вместо $(i\omega q_k)_j$ разностных аналогов системы уравнений для возмущений (1.52) в соответствующей точке.

Вводя обозначение

$$\lambda = i\omega, \quad (1.56)$$

можно получить стандартную задачу на собственные значения

$$(S' - \lambda I) \cdot \tilde{\mathbf{a}} = 0, \quad (1.57)$$

где I – единичная матрица, $\tilde{\mathbf{a}}$ – дискретный аналог поля амплитуд возмущений (1.35), а S' – матрица, полученная из матрицы S в (1.36) после проведения описанных выше преобразований.

1.2.5. Решение задачи на собственные значения

Результатом решения стандартной матричной задачи на собственные значения (1.57) являются собственные числа и соответствующие им собственные вектора. При этом мнимая часть собственного числа определяет частоту соответствующего собственного возмущения, а его вещественная часть – скорость его роста (в том случае, если она является отрицательной) или затухания (если она является положительной). Таким образом, течение является неустойчивым, если спектр собственных чисел содержит хотя бы одно собственное число, с отрицательной вещественной частью. Иными словами, для ответа на вопрос об устойчивости рассматриваемого течения достаточно найти собственное число с наименьшей вещественной частью, которое в дальнейшем будем называть «наиболее неустойчивым собственным числом». Если вещественная часть наиболее неустойчивого собственного числа отрицательна – течение неустойчиво, в противном случае – устойчиво.

Матрица S' , для которой численно решается задача на собственные значения, является вещественной в случае двумерного базового течения без третьей компоненты скорости ($\bar{w} = 0$) и комплексной в противном случае. Размерность этой матрицы равна полному количеству узлов сетки, помноженному на количество искомым переменных. Например, при численном решении задачи устойчивости двумерного ламинарного течения к двумерным возмущениям (количество переменных равно четырем) на сетке 50×50 размерность матрицы равна 10^4 . Хранение плотной матрицы такого размера потребует примерно 0.75 Гб оперативной памяти, а при исследовании устойчивости представляющих практический интерес течений используются гораздо более мелкие сетки, количество переменных может достигать шести, а матрица может быть комплексной (само по себе это удваивает требования к оперативной памяти). Поэтому при современном уровне развития вычислительной техники решение поставленной задачи возможно только при использовании специальных методов хранения матриц, учитывающих их разреженность, что исключает возможность применения популярного в течение долгого времени QZ -алгоритма (Голуб, Ван Лоун, 1999),

возвращающего полный набор собственных чисел и собственных векторов матрицы, но требующего хранения плотных матриц.

Существенный прорыв в области применения экономичных методов решения задач на собственные значения к задачам ЛТУ был достигнут в середине 90-х годов, когда для численного исследования глобальной устойчивости вязких течений *Ehrenstein, 1996* и *Lin, Malik, 1996* независимо использовали методы решения задач на собственные значения, основанные на проектировании на подпространства Крылова (*Голуб, Ван Лоун, 1999*). Эти методы позволяют получить запрашиваемое количество наибольших по модулю собственных чисел и соответствующих им собственных векторов, в результате чего по сравнению с *QZ*-алгоритмом не только достигается значительная экономия оперативной памяти, но и заметно сокращается время расчета. Для решения задач на собственные значения с несимметричными (неэрмитовыми) матрицами (именно к этому типу относятся матрицы, являющиеся результатом дискретизации системы уравнений для амплитуд возмущений (1.52)) в настоящее время широкое распространение получил принадлежащий к классу методов подпространств Крылова метод Арнольди (*Lehoucq et al., 1998*). Именно этот метод использовался, в частности, при численном исследовании глобальной устойчивости в таких работах как работы *Theofilis et al., 2000*, *Jacquin et al., 2003*. С учетом того, что данный метод наиболее эффективен при поиске наибольших по модулю собственных чисел, при его использовании нередко прибегают к спектральному преобразованию исходной матрицы, трансформирующему наиболее существенные с физической точки зрения собственные числа (то есть собственные числа с наименьшей вещественной частью) к наибольшим по модулю собственным числам. Это преобразование представляет собой комбинацию сдвига и обращения матрицы.

Рассмотрим в качестве иллюстрации задачу на собственные значения (1.57). Пусть представляющие интерес собственные числа матрицы находятся в окрестности числа λ_0 (вообще говоря, комплексного). Тогда эту задачу можно переформулировать следующим образом

$$S' \cdot \tilde{\mathbf{a}} - \lambda_0 \tilde{\mathbf{a}} + (\lambda_0 - \lambda) \tilde{\mathbf{a}} = 0, \quad (1.58)$$

после чего она может быть преобразована к задаче на собственные значения, которая эквивалентна оригинальной:

$$(S' - \lambda_0 I)^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{a}} - \lambda' \tilde{\mathbf{a}} = 0, \quad (1.59)$$

где

$$\lambda' = 1/(\lambda - \lambda_0). \quad (1.60)$$

В результате наибольшее по модулю собственное число новой задачи соответствует собственному числу оригинальной задачи наиболее близкому к λ_0 . При этом для поиска собственных чисел с наименьшей вещественной частью в качестве λ_0 можно выбрать достаточно большое по модулю отрицательное вещественное число.

В заключение отметим, что при использовании описанного спектрального преобразования в настоящей работе для обращения матрицы используется специальная модификация метода LU -разложения, предложенная в работе *Demmel et al., 1999*. Важным достоинством этого алгоритма является эффективная система хранения информации в процессе LU -разложения, основанная на разреженности исходной матрицы и позволяющая многократно уменьшить требуемый объем оперативной памяти.

1.3. Применение ЛТУ для оценки эффективности методов управления устойчивостью потока

1.3.1 Краткий обзор состояния вопроса.

В течение нескольких последних десятилетий все большее внимание уделяется разработке методов позволяющих целенаправленно изменять те или иные характеристики нестационарных течений, вообще, и условия перехода от стационарной к нестационарной форме течения, в частности. При этом могут преследоваться такие цели как подавление отрыва потока от обтекаемой поверхности, затягивание или ускорение перехода к турбулентности и т. д. Например, подавление перехода на крыльях и стабилизаторах может привести к уменьшению сопротивления всего самолета примерно на 10% (*Joslin et al., 1997*). Большинство исследований в указанном направлении относится к управлению с помощью стационарных воздействий. Напомним, что стационарный отсос жидкости как способ управления пограничным слоем был предложен еще Прандтлем, а из сравнительно недавних работ на эту тему отметим исследования, связанные с анализом возмущений, вносимых в поток шероховатостью поверхности (*Zhigulev, Fedorov, 1987, Crouch, 1992*). В последние годы значительный интерес проявляется также к анализу эффективности нестационарных воздействий, которые требуют значительно меньших затрат энергии или увеличения веса (габаритов) рассматриваемого технического устройства. Одной из первых работ, рассматривающих нестационарные воздействия, была работа *Gaster, 1965*, в которой исследовался отклик течения в пограничном слое на помещенную в него осциллирующую ленту. Различные экспериментальные исследования влияния периодических воздействий на отрывные течения представлены в обзорной работе *Greenblatt, Wygnanski, 2000*.

Наиболее распространенным подходом к исследованию отклика течения на внешнее воздействие является разложение по собственным модам течения, опирающееся на линейный анализ. В частности, в уже упомянутой работе *Gaster, 1965* отклик течения на воздействие осциллирующей ленты

раскладывался по собственным функциям уравнения Орра-Зоммерфельда. При этом показано, что в возмущенном течении доминирует собственная мода с наибольшей скоростью роста (этот вывод был подтвержден и в других аналогичных работах). Следует отметить, что данный подход (использование разложения в ряды по собственным функциям) требует применения дополнительного математического аппарата, так как в этом случае, кроме собственно линейного анализа, то есть решения задачи на собственные значения (например, уравнения Орра-Зоммерфельда – для параллельных течений), возникает необходимость решения сопряженной задачи на собственные значения. С использованием этого аппарата были решены задачи о развитии внешних возмущений конечной амплитуды в пограничных слоях (см., например, работы *Zhigulev et al., 1980, Zhigulev, Fedorov, 1987, Hill, 1995, Lasseigne et al., 1999, Dobrinsky, Collis, 2000, Bottaro et al., 2003*), однако с точки зрения настоящей работы, посвященной применению методов ЛТУ для анализа условий возникновения глобальных автоколебаний потока, больший интерес представляет работа *Hill, 1992*. В ней на основе применения сопряженных собственных решений были выполнены расчеты, воспроизводящие условия экспериментального исследования *Strykowski, Sreenivasan, 1990*, в котором изучалась возможность подавления глобальной неустойчивости при обтекании круглого цилиндра путем воздействия на него другого цилиндра малого диаметра, помещенного в различные точки следа основного цилиндра. Эксперименты показали, в частности, что при определенных положениях малого цилиндра происходит существенное увеличение числа Рейнольдса, при котором начинаются автоколебания следа. Как видно из рис. 1.3, на котором представлено сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными по сдвигу критического числа Рейнольдса в зависимости от положения малого цилиндра в следе, метод Хилла обеспечивает не только качественно правильное, но и удовлетворительное количественное согласование расчета с экспериментом. Следует подчеркнуть, что в рамках этого метода воздействие на течение малого цилиндра имитируется точечным источником импульса (объемной силой), интенсивность

которого зависит от локальных характеристик потока. Это позволяет получить всю “карту сдвига”, показанную на рис. 1.3, на основе единственного стационарного расчета обтекания одиночного цилиндра. Таким образом, данный подход представляется весьма эффективным, в связи с чем в настоящей работе был построен представленный в следующем разделе более общий алгоритм расчета устойчивости отрывных сжимаемых течений при наличии малого внешнего воздействия на след, базирующийся на описанном в разделе 1.2 алгоритме решения задач об устойчивости стационарных решений уравнений Навье-Стокса и Рейнольдса в рамках ЛТУ в сочетании с процедурой Хилла.

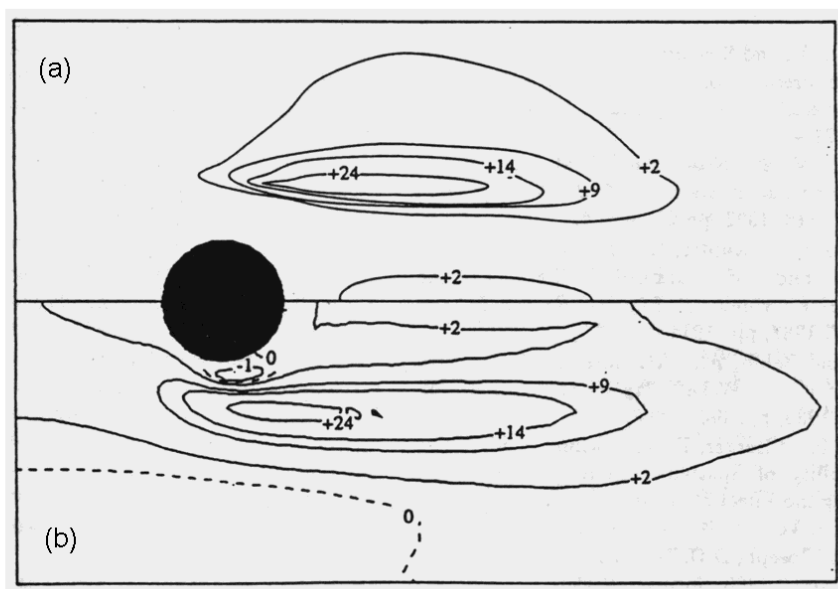


Рис. 1.3. Влияние местоположения цилиндра малого диаметра в следе большого цилиндра на значение критического числа Рейнольдса (цифры на изолиниях показывают изменение критического числа Рейнольдса за счет воздействия, приложенного в рассматриваемой точке): (a) – эксперимент *Strykowski, Sreenivasan, 1990*, (b) – расчет Хилла *Hill, 1992*

1.3.2. Алгоритм оперативной оценки влияния малых возмущений на условия возникновения глобальных автоколебаний в сжимаемых потоках.

Представленный алгоритм представляет собой обобщение процедуры Хилла (*Hill, 1992*), которая позволяет произвести оперативную оценку возможной стабилизации или дестабилизации течения под воздействием малых внешних возмущений потока и, тем самым, существенно уменьшить количество расчетов с использованием более трудоемких точных методов необходимых для определения оптимальных параметров воздействия.

Рассмотрим систему нестационарных уравнений движения (1.10), которая может быть записана в следующей операторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{q})}{\partial t} + \mathbf{m}(\mathbf{q}) = 0. \quad (1.61)$$

Пусть вектор $\bar{\mathbf{q}}_0$ – стационарное решение системы уравнений (1.61), то есть удовлетворяет системе стационарных уравнений

$$\mathbf{m}(\bar{\mathbf{q}}_0) = 0. \quad (1.62)$$

Тогда, применяя к (1.61) процедуру линеаризации, описанную в разделе 1.2.1, можно получить следующую однородную систему уравнений для амплитуд возмущений

$$-\lambda_0 W(\bar{\mathbf{q}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 + M(\bar{\mathbf{q}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 = 0, \quad (1.63)$$

где операторы W и M определяются следующим образом:

$$W = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{q}}; \quad M = \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (1.64)$$

После умножения системы уравнений (1.63) слева на матрицу $(W(\bar{\mathbf{q}}_0))^{-1}$ она преобразуется к задаче на собственные значения для линейного дифференциального оператора $L = W^{-1} \cdot M$:

$$L(\bar{\mathbf{q}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 - \lambda_0 \tilde{\mathbf{q}}_0 = 0. \quad (1.65)$$

Рассмотрим далее случай, когда к потоку приложена объемная сила $\mathbf{f}(\mathbf{q})$, зависящая от его локальных параметров. Тогда система уравнений (1.61) принимает вид:

$$\frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{q})}{\partial t} + \mathbf{m}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}(\mathbf{q}). \quad (1.66)$$

Пусть $\bar{\mathbf{q}}_1$ представляет стационарное решение этой системы (здесь и далее индекс “1” относится к случаю наличия в потоке объемной силы), то есть удовлетворяет системе уравнений

$$\mathbf{m}(\bar{\mathbf{q}}_1) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_1). \quad (1.67)$$

Тогда, производя линеаризацию (1.66) аналогично тому, как это было сделано выше применительно к уравнению (1.61), получим следующую систему для амплитуд возмущений

$$-\lambda_1 W(\bar{\mathbf{q}}_1) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1 + M(\bar{\mathbf{q}}_1) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1 = F(\bar{\mathbf{q}}_1) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1, \quad (1.68)$$

где $F = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}$.

После умножения слева на матрицу $(W(\bar{\mathbf{q}}_1))^{-1}$ (1.68) преобразуется к задаче на собственные значения для оператора $[L - H]$

$$[L(\bar{\mathbf{q}}_1) - H(\bar{\mathbf{q}}_1)] \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1 - \lambda_1 \tilde{\mathbf{q}}_1 = 0, \quad (1.69)$$

где

$$H = W^{-1} \cdot F. \quad (1.70)$$

Для заданной объемной силы задача на собственные значения (1.69) может быть решена с помощью методики, описанной в разделе 1.2. Однако в этом случае для каждой новой объемной силы требуется получить новое базовое стационарное решение $\bar{\mathbf{q}}_1$, то есть, решить систему уравнений (1.67), и затем повторить решение задачи на собственные значения (1.69). Ниже представлен алгоритм, который в предположении о малости объемной силы \mathbf{f} позволяет

приближенно решить серию задач (1.69) для различных объемных сил на основе однократного решения (1.65) и сопряженной к ней задачи.

Итак, предположим, что решение системы уравнений (1.67), $\bar{\mathbf{q}}_1$, может быть представлено в виде суммы невозмущенного стационарного решения $\bar{\mathbf{q}}_0$ и малого приращения $\Delta\bar{\mathbf{q}}$:

$$\bar{\mathbf{q}}_1 = \bar{\mathbf{q}}_0 + \Delta\bar{\mathbf{q}}. \quad (1.71)$$

Тогда (1.67) можно преобразовать к следующему виду:

$$\mathbf{m}(\bar{\mathbf{q}}_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}_0} \right) \cdot \Delta\bar{\mathbf{q}} + O(\Delta\bar{\mathbf{q}}^2) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}_0} \right) \cdot \Delta\bar{\mathbf{q}} + O(\Delta\bar{\mathbf{q}}^2). \quad (1.72)$$

Используя (1.62) и (1.64), и предполагая, кроме того, что $\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{q}=\bar{\mathbf{q}}_0} \right) = O(\Delta q)$, получим следующую приближенную (с точностью до величин второго порядка малости относительно $\Delta\mathbf{q}$) систему уравнений:

$$M(\bar{\mathbf{q}}_0) \cdot \Delta\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_0). \quad (1.73)$$

Далее, представим $\tilde{\mathbf{q}}_1$ и λ_1 из (1.69) в виде суммы соответствующих величин для невозмущенного (при отсутствии объемной силы) течения и их малых приращений, вызванных действием объемной силы:

$$\tilde{\mathbf{q}}_1 = \tilde{\mathbf{q}}_0 + \Delta\tilde{\mathbf{q}}, \quad \lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda. \quad (1.74)$$

С использованием (1.65) и (1.74) исходная задача на собственные значения (1.69) с точностью до величин второго порядка малости относительно приращений $\Delta\mathbf{q}$, $\Delta\tilde{\mathbf{q}}$ и $\Delta\lambda$ может быть преобразована к виду:

$$L(\bar{\mathbf{q}}_0) \cdot \Delta\tilde{\mathbf{q}} - \lambda_0 \Delta\tilde{\mathbf{q}} = H(\bar{\mathbf{q}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 - (L(\bar{\mathbf{q}}_0 + \Delta\mathbf{q}) - L(\bar{\mathbf{q}}_0)) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 + \Delta\lambda \tilde{\mathbf{q}}_0. \quad (1.75)$$

Далее, рассмотрим задачу на собственные значения, сопряженную (1.65):

$$L^*(\bar{\mathbf{q}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0^* - \bar{\lambda}_0 \tilde{\mathbf{q}}_0^* = 0, \quad (1.76)$$

где в силу сопряженности задач (1.65) и (1.76), $\bar{\lambda}_0$ и λ_0 – комплексно-сопряженные величины.

Применяя к (1.75) альтернативу Фредгольма, получим:

$$[\tilde{\mathbf{q}}_0^*; (H(\bar{\mathbf{q}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 - (L(\bar{\mathbf{q}}_0 + \Delta \mathbf{q}) - L(\bar{\mathbf{q}}_0)) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 + \Delta \lambda \tilde{\mathbf{q}}_0)] = 0, \quad (1.77)$$

где символ $[\ ;]$ означает операцию скалярного умножения в рассматриваемом пространстве.

Разрешая (1.77) относительно $\Delta \lambda$, получим следующее выражение для сдвига собственного числа

$$\Delta \lambda = ([\tilde{\mathbf{q}}_0^*; (L(\bar{\mathbf{q}}_0 + \Delta \mathbf{q}) - L(\bar{\mathbf{q}}_0)) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0] - [\tilde{\mathbf{q}}_0^*; (H(\bar{\mathbf{q}}_0) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0)]) / [\tilde{\mathbf{q}}_0^*; \tilde{\mathbf{q}}_0], \quad (1.78)$$

из которого легко получить новое (при наличии объемной силы) значение собственного числа $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta \lambda$. При этом, как уже отмечалось, наличие хотя бы одного собственного числа с отрицательной вещественной частью позволяет сделать вывод о неустойчивости течения. Например, если вещественная часть исходного (при отсутствии объемной силы) собственного числа λ_0 является отрицательной, а вещественная часть его нового (при наличии объемной силы) значения λ_1 – положительной, то воздействие объемной силы приводит к стабилизации течения. Наоборот, если λ_0 имеет положительную вещественную часть, а λ_1 – отрицательную, то воздействие объемной силы является дестабилизирующим.

1.3.3. Основные этапы численной реализации алгоритма

Численная реализация описанного в предыдущем разделе алгоритма осуществляется в 6 этапов.

На первом этапе численно решается система уравнений Рейнольдса (1.62) и получается стационарное решение $\bar{\mathbf{a}}_0$ (разностный аналог $\bar{\mathbf{q}}_0$).

На втором этапе вычисляются элементы матрицы коэффициентов уравнения для амплитуд возмущений $S(\bar{\mathbf{a}}_0)$, которая является конечно-разностным аналогом линейного дифференциального оператора $L(\bar{\mathbf{q}}_0)$ в задаче

на собственные значения (1.65), а также эрмитово-сопряженной к ней (транспонированной в вещественном случае) матрицы $S^*(\bar{\mathbf{a}}_0)$ (разностный аналог $L^*(\bar{\mathbf{q}}_0)$).

На третьем этапе численно решаются две сопряженные задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} (S(\bar{\mathbf{a}}_0) - \lambda_0 I) \cdot \tilde{\mathbf{a}}_0 &= 0, \\ (S^*(\bar{\mathbf{a}}_0) - \bar{\lambda}_0 I) \cdot \tilde{\mathbf{a}}_0^* &= 0, \end{aligned} \quad (1.79)$$

в результате чего определяются собственные вектора $\tilde{\mathbf{a}}_0$ и $\tilde{\mathbf{a}}_0^*$ и собственное число λ_0 (λ_0 и $\bar{\lambda}_0$ – комплексно-сопряженные числа).

На четвертом этапе решается система линейных алгебраических уравнений (конечно-разностный аналог системы 1.73)):

$$S(\bar{\mathbf{a}}_0) \cdot \Delta \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{a}}_0), \quad (1.80)$$

где $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{a}}_0)$ – конечно-разностное представление стационарной силы $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{q}}_0)$, а $\Delta \bar{\mathbf{a}}$ – конечно-разностный аналог $\Delta \bar{\mathbf{q}}$.

Решение системы (1.80) осуществляется при помощи LU -разложения матрицы $S(\bar{\mathbf{a}}_0)$, после чего последовательно решаются две системы линейных уравнений с треугольными матрицами.

На пятом этапе вычисляются элементы матрицы $S(\bar{\mathbf{a}}_1)$, где вектор $\bar{\mathbf{a}}_1$ определяется на основе решения (1.80) по формуле:

$$\bar{\mathbf{a}}_1 = \bar{\mathbf{a}}_0 + \Delta \bar{\mathbf{a}}. \quad (1.81)$$

На последнем шестом этапе расчета по формуле, представляющей собой конечно-разностный аналог (1.78)

$$\Delta \lambda = ([\tilde{\mathbf{a}}_0^*; (S(\bar{\mathbf{a}}_1) - S(\bar{\mathbf{a}}_0)) \cdot \tilde{\mathbf{a}}_0] - [\tilde{\mathbf{a}}_0^*; G \cdot \tilde{\mathbf{a}}_0]) / [\tilde{\mathbf{a}}_0^*; \tilde{\mathbf{a}}_0], \quad (1.82)$$

определяется сдвиг обобщенной частоты.

Здесь G – конечно-разностное представление оператора H (1.70), а операция скалярного умножения $[\cdot]$ в рассматриваемом конечномерном комплексном векторном пространстве определяется следующим образом:

$$[x; y] = \sum \bar{x}_i y_i. \quad (1.83).$$

Заметим, что наиболее дорогостоящие в вычислительном плане первые три и часть четвертого этапа (LU -разложение матрицы) в данном алгоритме не зависят от рассматриваемой объемной силы, что делает его чрезвычайно эффективным при исследовании воздействия различных объемных сил на одно и то же течение, поскольку наиболее трудоемкие вычисления проводятся только один раз.

ГЛАВА 2

ТЕСТИРОВАНИЕ РАЗРАБОТАННЫХ АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Данная глава посвящена тестированию разработанных вычислительных алгоритмов и их программной реализации. В ее первом разделе представлены результаты формальных тестов, основанных на инвариантности уравнений относительно двух преобразований системы координат, а именно относительно ее поворота вокруг оси z , вдоль которой параметры стационарного течения предполагаются постоянными, и при переходе к системе координат, движущейся вдоль оси z с постоянной скоростью. Во втором параграфе разработанный аппарат применяется для решения классической задачи об устойчивости ламинарного обтекания круглого цилиндра. Полученные при этом результаты сравниваются с известными экспериментальными данными, с опубликованными в литературе результатами расчетов на основе ЛТУ, а также с известными и полученными в диссертации решениями нестационарных уравнений Навье-Стокса.

2.1. Проверка матрицы коэффициентов системы линейных уравнений для амплитуд возмущений

Описанные во втором параграфе первой главы алгоритмы решения данной задачи были реализованы в виде программного кода на языках C и Fortran с использованием стандартных библиотек открытого доступа SuperLU (Demmel et al., 1999) и ARPACK (Lehoucq et al., 1998). Учитывая громоздкость этих алгоритмов, проверка корректности их реализации приобретает первостепенное значение. При этом наибольшую сложность представляет собой проверка правильности определения элементов матрицы коэффициентов S' в уравнении для амплитуд возмущений (1.57), для которой решается задача на собственные значения. К сожалению, обычные методы тестирования газодинамических программ (сравнение с аналитическими решениями простейших задач или с результатами расчетов, полученными с использованием других программ) в данном случае непригодны и необходимо использование каких-либо других тестов. В настоящей работе для этой цели были применены тесты, основанные на знании того, как должны изменяться элементы матрицы S' (1.57) при определенных преобразованиях системы координат.

2.1.1. Изменение матрицы при повороте системы координат вокруг оси z.

Первый из рассматриваемых тестов основан на проверке правильности изменения элементов матрицы коэффициентов в уравнении для амплитуд возмущений (1.52) при повороте декартовой системы координат, в которой оно записано, на некоторый произвольный угол относительно оси z (см. рис. 2.1). Рассмотрим, каким должно быть это изменение.

Пусть задача на собственные значения

$$L(\bar{\mathbf{q}}, \beta) \cdot \tilde{\mathbf{q}} - \lambda \tilde{\mathbf{q}} = 0, \quad (2.1)$$

сформулирована в некоторой декартовой системе координат x, y, z .

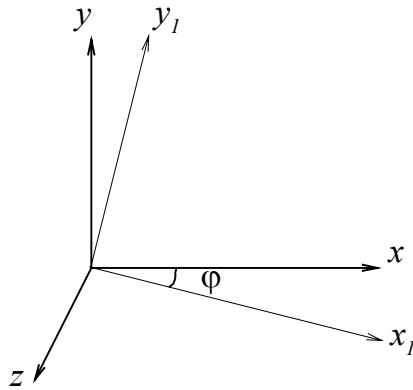


Рис. 2.1. «Старая» и «новая» системы координат

Перейдем к новой системе координат, x_1, y_1, z_1 повернутой относительно исходной системы на угол φ (далее в этом разделе нижний индекс 1 означает принадлежность к новой системе координат). Тогда связь между новыми и старыми координатами определяется соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cdot \cos(\varphi) - y \cdot \sin(\varphi) \\ y_1 &= x \cdot \sin(\varphi) + y \cdot \cos(\varphi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

а преобразование векторов осуществляется с помощью следующей матрицы поворота:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

С использованием этой матрицы связь между вектором основных переменных $\mathbf{q} = \{\rho, u, v, w, T, v_i\}^T$ в новой и старой системах координат определяется по формуле

$$\mathbf{q}_1 = H \cdot \mathbf{q}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим далее задачу на собственные значения, записанную в новой системе координат:

$$L_1(\bar{\mathbf{q}}_1, \beta) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1 - \lambda_1 \tilde{\mathbf{q}}_1 = 0. \quad (2.5)$$

Подставляя выражение (2.4) для стационарного решения $\bar{\mathbf{q}}_1$ в левую часть (2.5) и умножая полученное соотношение слева на матрицу H^{-1}

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим

$$H^{-1} \cdot L_1(H \cdot \bar{\mathbf{q}}, \beta) \cdot H \cdot \tilde{\mathbf{q}} - \lambda_1 \tilde{\mathbf{q}} = 0. \quad (2.6)$$

Используя то, что преобразование поворота не меняет спектра дифференциального оператора, из сравнения (2.6) и (2.1) легко получить искомое условие, которому должен удовлетворять дифференциальный оператор при таком преобразовании

$$H^{-1} \cdot L_1(H \cdot \bar{\mathbf{q}}, \beta) \cdot H = L(\bar{\mathbf{q}}, \beta). \quad (2.7)$$

Проделав аналогичные преобразования для дискретной задачи на собственные значения

$$(S(\bar{\mathbf{a}}, \beta) - \lambda T) \cdot \tilde{\mathbf{a}} = 0, \quad (2.8)$$

получим следующий дискретный аналог (2.7) для внутренних точек расчетной области

$$K^{-1} \cdot S_1(K \cdot \bar{\mathbf{a}}, \beta) \cdot K = S(\bar{\mathbf{a}}, \beta), \quad (2.9)$$

где K представляет собой блочно-диагональную матрицу

$$K = \text{diag}\{H, H, \dots, H\}, \quad (2.10)$$

количество блоков в которой равно количеству точек в разностной сетке, а ее размерность равна размерности вектора $\tilde{\mathbf{a}}$ (и всей задачи (2.8)).

Для реализации описанного теста проводился независимый расчет элементов матриц S и S_I для некоторого базового решения в двух системах координат, а затем выполнялась поэлементная проверка выполнения равенства (2.10). Отметим, что наиболее простым тестом является поворот системы координат на угол $\varphi = 90^\circ$, при котором

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.11)$$

Этот тест применим не только ко всей матрице, но и к ее отдельным частям, что значительно упрощает локализацию ошибок.

2.1.2. Изменение матрицы при движении системы координат вдоль оси z с постоянной скоростью.

Данный тест основан на том, что хотя при переходе в систему координат, равномерно двигающуюся вдоль оси z , система уравнений для возмущений изменяется, ее решение должно оставаться неизменным.

Рассмотрим систему уравнений для амплитуд возмущений (1.18), записанную в декартовой системе координат:

$$-i\omega W(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \tilde{\mathbf{q}} + M(\bar{\mathbf{q}}, \beta) \cdot \tilde{\mathbf{q}} = 0, \quad (2.12)$$

Перейдем в этой системе к новой системе координат, движущейся относительно исходной вдоль оси z , с постоянной скоростью w_0 (см. рис. 2.2):

$$z_1 = z - w_0 t \quad (2.13)$$

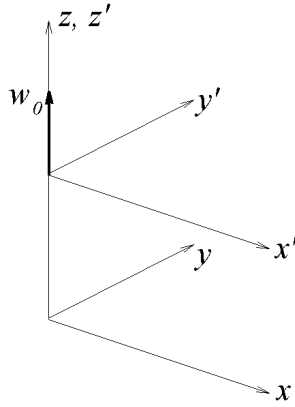


Рис. 2.2. Неподвижная и движущаяся с постоянной скоростью w_0 вдоль оси z системы координат

Выражение (2.13) определяет следующую связь между векторами переменных для базового решения и векторами возмущений в двух рассмотренных системах координат:

$$\bar{\mathbf{q}}_1 = \bar{\mathbf{q}} + \{0, 0, 0, -w_0, 0, 0\}^T, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{q}'_1(x, y, z_1, t) = \tilde{\mathbf{q}}(x, y) \cdot \exp(-i\omega t + i\beta(z_1 + w_0 t)) = \mathbf{q}' \cdot \exp(i\beta w_0 t). \quad (2.15)$$

С учетом (2.15) система уравнений для возмущений (2.12) в новой системе координат может быть записана следующим образом:

$$-i(\omega - \beta w_0) \mathcal{W}_1(\bar{\mathbf{q}}_1) \cdot \tilde{\mathbf{q}} + M_1(\bar{\mathbf{q}}_1, \beta) \cdot \tilde{\mathbf{q}} = 0. \quad (2.16)$$

Поскольку при переходе в новую систему координат решение системы уравнений для возмущений не должно изменяться, системы уравнений (2.12) и (2.16) должны иметь одно и то же решение. Действительно, система уравнений (2.12) представляет собой линейную комбинацию строк системы уравнений (2.16), определяемую следующей матрицей:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -iw_0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ w_0^2/2 & 0 & 0 & iw_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

то есть

$$D \cdot (-i\omega W_1(\bar{\mathbf{q}}_1) + i\beta w_0 W_1(\bar{\mathbf{q}}_1) + M_1(\bar{\mathbf{q}}_1, \beta)) = -i\omega W(\bar{\mathbf{q}}) + M(\bar{\mathbf{q}}, \beta), \quad (2.18)$$

и, следовательно

$$W^{-1} \cdot D \cdot W_1 \cdot (L_1(\bar{\mathbf{q}}_1, \beta) - i(\omega - \beta w_0)I) = L(\bar{\mathbf{q}}, \beta) - i\omega I, \quad (2.19)$$

где I – единичная матрица. Это равенство должно выполняться для любых ω .

Подставляя в него $\omega = 0$, получаем:

$$W^{-1} \cdot D \cdot W_1 \cdot (L_1(\bar{\mathbf{q}}_1, \beta) + i\beta w_0 I) = L(\bar{\mathbf{q}}, \beta). \quad (2.20)$$

Выражение (2.20) может быть представлено в следующей конечно-разностной форме:

$$B \cdot (S_1(\bar{\mathbf{a}}_1, \beta) + i\beta w_0 T) = S(\bar{\mathbf{a}}, \beta), \quad (2.21)$$

где B – следующая блочно-диагональная матрица

$$B = \text{diag}\{W^{-1} \cdot D \cdot W_1, W^{-1} \cdot D \cdot W_1, \dots, W^{-1} \cdot D \cdot W_1\}. \quad (2.22)$$

Следует отметить, что каждый блок матрицы B соответствует какой-либо точке расчетной сетки, поэтому значения матриц $W(\bar{\mathbf{q}})$ и $W_1(\bar{\mathbf{q}}_1)$ для разных блоков различны.

Для реализации описанного теста рассматривались два базовых решения, отличающихся друг от друга только наличием постоянной z -компоненты скорости ($-w_0$). С использованием этих решений производилось независимое вычисление матриц S и S_I , а затем осуществлялась поэлементная проверка выполнения соотношения (2.21).

Отметим в заключение, что применение описанных тестов оказалось весьма полезным и позволило выявить ряд ошибок в программе расчета элементов матрицы коэффициентов уравнений для амплитуд возмущений. Однако успешное прохождение этих тестов не дает стопроцентной гарантии отсутствия ошибок в разработанных алгоритмах и реализующих их программ, и для их

всесторонней проверки необходимо сопоставление решений задач устойчивости, полученных с использованием разработанного математического обеспечения, с аналогичными решениями, полученными в литературе. Кроме того, весьма желательным является сравнение определенных с его помощью условий устойчивости для какого-либо течения с соответствующими условиями, полученными на основе решения нестационарных уравнений Навье-Стокса, и с экспериментальными данными. Результаты таких сравнений представлены в следующем разделе диссертации.

2.2. Тестирование разработанных алгоритмов на примере решения задачи об устойчивости ламинарного двумерного обтекания цилиндра

В качестве основного теста для проверки корректности разработанного математического аппарата была выбрана задача об устойчивости стационарного ламинарного обтекания круглого цилиндра. Данный выбор обусловлен, прежде всего, тем, что устойчивость этого течения хорошо изучена как с применением ЛГУ (исследование условий возникновения нестационарной вихревой дорожки в следе за круглым цилиндром было одним из первых применений этой теории к двумерным вязким течениям (*Jackson, 1987, Zebib, 1987*)). Кроме того, нестационарное течение, возникающее при превышении числом Рейнольдса критического значения и потере устойчивости, остается двумерным, что является необходимым условием применимости разработанных методов. Наконец, геометрическая простота течения и относительно низкие значения числа Рейнольдса позволяют существенно сократить время расчета, что также является весьма важным, так как для всесторонней проверки разработанного аппарата необходимо проведение большого числа расчетов.

2.2.1. Описание расчетов.

Для того чтобы избежать вычислительных трудностей, связанных с расчетом “типозвуковых” ($M \ll 1$) сжимаемых течений, с одной стороны, и иметь возможность сравнивать полученные решения с известными из литературы данными для обтекания цилиндра несжимаемой жидкостью, с другой, расчеты проводились при “компромиссном” с этой точки зрения значении числа Маха набегающего потока $M = 0.2$, при котором эффекты сжимаемости еще пренебрежимо малы, а вычислительные трудности уже отсутствуют. При этом числе Маха были выполнены расчеты устойчивости стационарного решения двумерных уравнений Навье-Стокса (вектор основных переменных \mathbf{q} содержит только четыре переменных $\mathbf{q} = (\rho, u, v, T)$) для рассматриваемого течения при изменении числа Рейнольдса, построенного по

параметрам набегающего потока и диаметру цилиндра $Re = U_\infty D / \nu$, в диапазоне от 40 до 100.

На рис. 2.3 представлены расчетная область (ее внешний диаметр равен 125-ти диаметрам цилиндра) и сетка размером 240×240 ячеек, на которой было выполнено большинство расчетов.

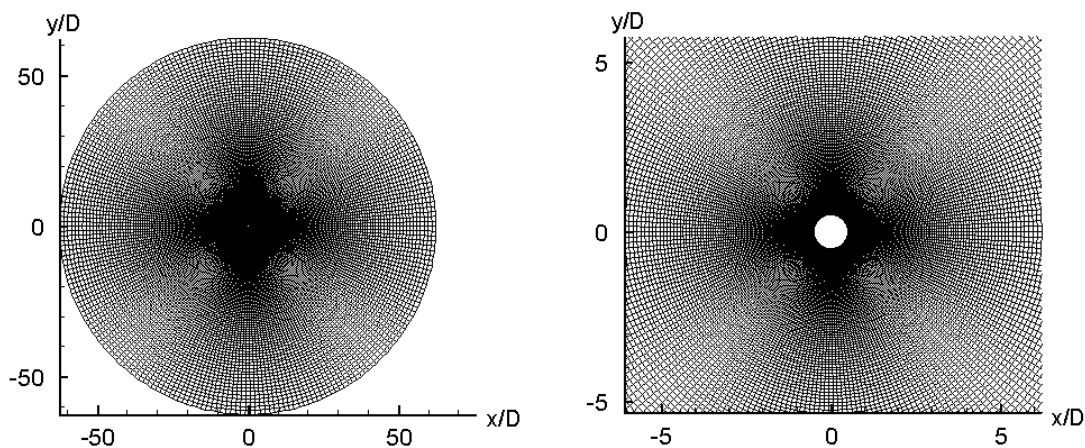


Рис. 2.3. Расчетная область и сетка, использовавшиеся при решении задачи об устойчивости ламинарного обтекания цилиндра.

Следует отметить, что хотя рассматриваемое течение теряет устойчивость при числах Рейнольдса $Re > \sim 47$ (Hammache, Gharib, 1991, Jackson, 1987), стационарное решение уравнений Навье-Стокса с помощью используемого НТС - кода удается найти во всем рассмотренном диапазоне изменения числа Re . Это оказывается возможным, благодаря применению современных высокоустойчивых противопоточных схем при больших значениях числа Куранта.

Наряду с сеткой, показанной на рис. 2.3, с целью исследования влияния размеров сетки на базовое стационарное решение и на решение задачи на собственные значения, при одном из рассмотренных чисел Рейнольдса ($Re = 60$) были также проведены расчеты на более грубых и более мелких сетках. Наконец, для ответа на вопрос о влиянии способа аппроксимации дифференциального оператора L (1.52) на решение дискретной задачи на собственные значения, отдельные расчеты были выполнены с использованием различных способов аппроксимации.

2.2.2. Обсуждение результатов.

На рис. 2.4 приведена зависимость вещественной (а) и мнимой (б) части собственного числа с наименьшей вещественной частью от числа Рейнольдса, полученная в результате серии расчетов при изменении Re в диапазоне от 40 до 100, выполненной на сетке 240×240 (см. рис. 2.3) с помощью математического аппарата, описанного в Главе 1. Из рисунка видно, что для рассматриваемого течения критическое значение числа Рейнольдса, то есть значение, при котором вещественная часть собственного числа переходит через 0, оказывается равным $Re_c = 47$.

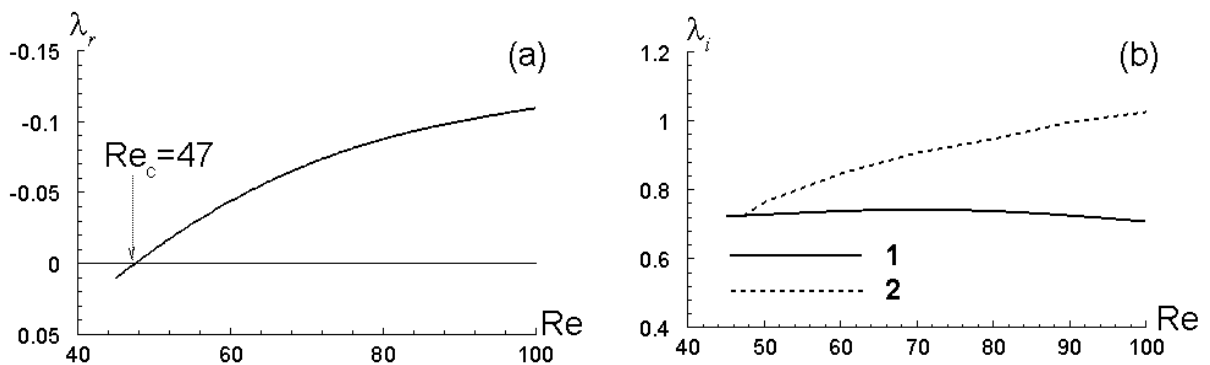


Рис. 2.4. Зависимость вещественной (а) и мнимой (б) части наиболее неустойчивого собственного числа от числа Рейнольдса:

1- эксперимент *Hammache, Gharib, 1991*; 2 – расчет на основе ЛТУ, настоящая работа

Сравнение этого значения и соответствующего ему значения числа Струхаля собственных возмущений ($St = \lambda_i / (2\pi) = 0.116$) с известными из литературы экспериментальными данными и результатами расчетов других авторов с использованием ЛТУ, а также с аналогичными результатами, полученными в настоящей работе на основе решения нестационарных уравнений Навье-Стокса, представлено в Таблице 2.1. Это сравнение показывает, что полученное в настоящей работе значения Re_c хорошо согласуется со всеми известными исследованиями, за исключением работы *Zebib, 1987*. Однако, судя по данным, представленным в этой работе, полученные в ней результаты являются неточными из-за использования недостаточно протяженной расчетной области.

Таблица 2.1. Сравнение значений критического числа Рейнольдса и соответствующего ему числа Струхалия, полученных в экспериментах и с помощью различных расчетных методов.

	Критическое число Рейнольдса Re_c	Безразмерная частота St
ЛТУ, данная работа	47	0.116
Нестационарные уравнения Навье-Стокса, данная работа	48	0.113
Эксперимент <i>Strykowski, Sreenivasan, 1990</i>	46	0.126
Эксперимент <i>Hammache, Gharib, 1991</i>	47	0.116
ЛТУ, <i>Zebib, 1987</i>	43	0.13
ЛТУ, <i>Jackson, 1987</i>	46	0.138

Результаты серии расчетов, выполненных на последовательно измельченных сетках и с использованием различных способов аппроксимации (1.50) дифференциального оператора L (1.52) при $Re = 60$, представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2. Влияние размеров сетки и способа аппроксимации оператора L на величину вещественной и мнимой частей собственного числа с наименьшей вещественной частью при обтекания цилиндра при $Re = 60$. (α_H - вес противопоточной схемы).

Схема Сетка	Центрально-разностная $\alpha_H = 0$	Гибридная $\alpha_H = 0.2$	Противопоточная $\alpha_H = 1$
80×80	-0.0342, 0.7614	-0.0331, 0.7603	-0.0277, 0.7564
160×160	-0.0425, 0.7434	-0.0424, 0.7432	-0.0418, 0.7425
240×240	-0.0435, 0.7399	-0.0434, 0.7399	-0.0433, 0.7397
320×320	-0.0438, 0.7388	-0.0437, 0.7388	-0.0437, 0.7387
400×400	-0.0439, 0.7383	-0.0439, 0.7383	-0.0439, 0.7382

Видно, что сетка 240×240 обеспечивает практически сошедшееся решение (отличие полученного с ее помощью собственного числа от собственных чисел,

рассчитанных на более мелких сетках, не превышает 1.5%). Более того, судя по приведенным в таблице 2.2 данным, для решения рассматриваемой задачи вполне приемлемой является более грубая сетка 160×160 (погрешность определения собственного числа не превышает при этом 5%). Что касается влияния разностной схемы, то на достаточно мелких сетках оно практически отсутствует.

Наконец, дополнительные расчеты, выполненные на сетке 240×240 с увеличенным диаметром расчетной области ($200D$ вместо $125D$) показали, что это не приводит к сколько-нибудь заметному изменению собственного числа.

Остановимся в заключение на анализе характера изменения частоты собственных возмущений с изменением числа Рейнольдса, показанном на рис.2.4b. Из этого рисунка видно, в частности, что по мере роста числа Рейнольдса, ее расчетное значение остается практически постоянным, в то время как в эксперименте (*Hammache, Gharib, 1991*) частота колебаний следа монотонно увеличивается. Для выяснения причин этого расхождения были проведены расчеты рассматриваемого течения на основе нестационарных уравнений Навье-Стокса при $Re = 50$ и $Re = 70$. В обоих случаях в качестве начальных условий задавались соответствующие стационарные решения, полученные при тех же числах Рейнольдса. Как видно из рис. 2.5a, на котором в качестве примера показан характер изменения во времени поперечной составляющей вектора скорости в точке, находящейся в плоскости симметрии следа при $Re=50$, на достаточно протяженном начальном промежутке времени (несколько десятков периодов) колебания параметров потока носят линейный характер (параметры потока в различных точках изменяются строго периодически, а амплитуда колебаний увеличивается по экспоненте). Из рис. 2.5b видно, что далее колебания постепенно выходят на периодический режим с постоянной частотой и амплитудой колебаний. Сравнение значений частоты колебаний и скорости роста амплитуды на начальной (линейной) и установившейся (нелинейной) фазах процесса с вещественной и мнимой частями собственного числа, полученного в рамках ЛГУ, и с

экспериментальными данными *Hammache, Gharib, 1991* представлено в таблице 2.3.

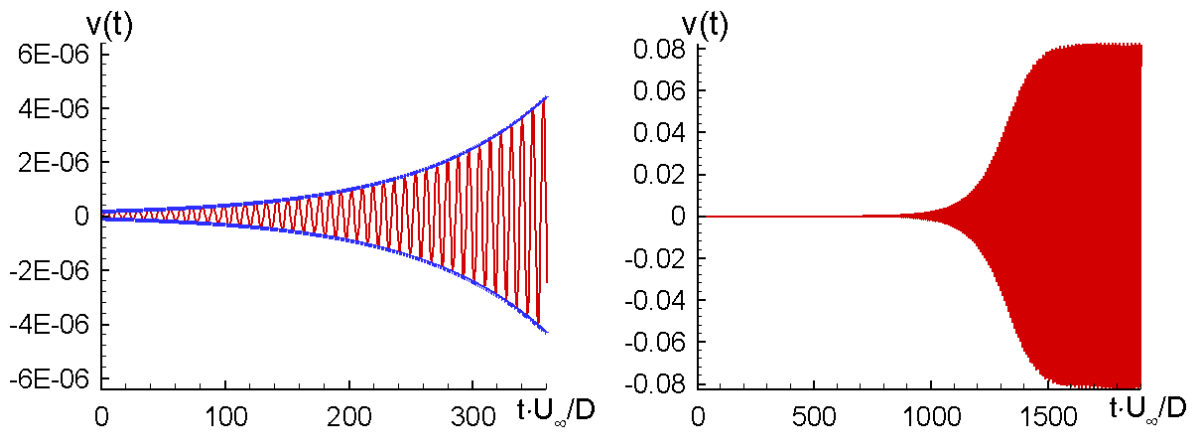


Рис. 2.5. Зависимость поперечной скорости в точке $x/D = 2$ в плоскости симметрии следа от времени при $Re=50$.
а – начальный участок, б – выход на установившиеся колебания

Таблица 2.3. Сравнение частоты и показателя роста амплитуды колебаний, полученных при решении нестационарных уравнений Навье-Стокса, с соответствующими параметрами, полученными в рамках ЛТУ, и с экспериментальными данными.

	$Re = 50$		$Re = 70$	
	Частота λ_i	Показатель роста λ_r	Частота λ_i	Показатель роста λ_r
Линейный анализ	0.732	0.10	0.745	0.068
Нестационарные уравнения Н.-С. (начальная линейная стадия решения)	0.731	0.096	0.739	0.067
Нестационарные уравнения Н.-С. (установившееся периодическое решение)	0.762	–	0.901	–
Эксперимент (установившиеся колебания) <i>Hammache, Gharib, 1991</i>	0.76	–	0.90	–

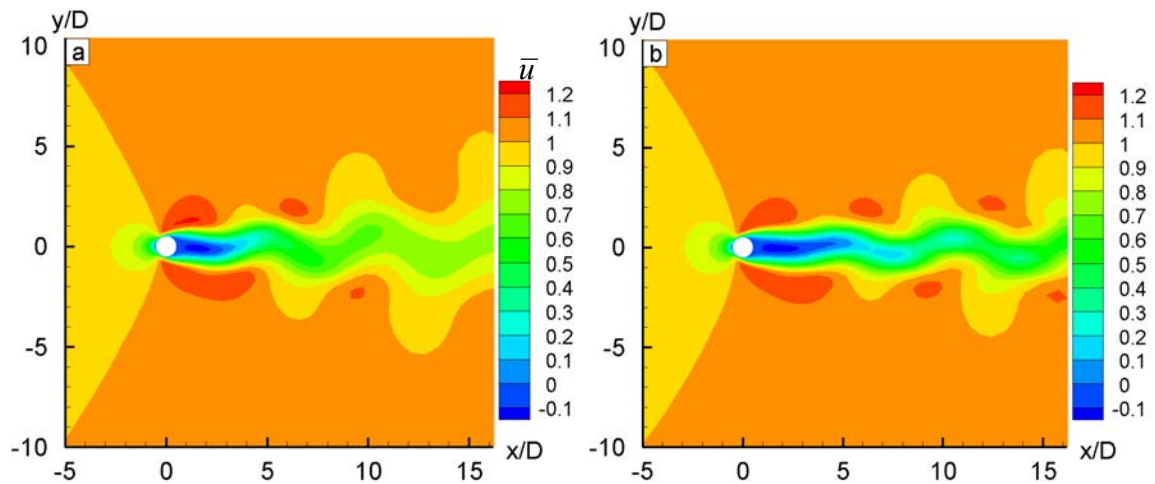
Из таблицы видно, что результаты линейного анализа практически совпадают с результатами, полученными на начальной стадии решения уравнений Навье-Стокса, и существенно отличаются от них на установившейся стадии решения этих уравнений, причем степень указанного различия увеличивается при удалении Рейнольдса от критического значения $Re_c=47$. В

то же время, в обоих рассмотренных случаях значения частоты колебаний для установившихся решений уравнений Навье-Стокса практически совпадают с экспериментальными значениями. Все это однозначно свидетельствует о том, что наблюдаемое на рис. 2.4b отклонение расчетных значений частоты собственных колебаний, полученных на основе ЛТУ, от экспериментальных данных при удалении числа Рейнольдса от критического значения, объясняется происходящим при этом увеличением роли нелинейных эффектов.

Полученные результаты позволяют предположить, что ЛТУ может использоваться не только для определений условий начала автоколебаний, но и для качественного анализа характера нестационарного течения, возникающего после потери устойчивости. В качестве примера, иллюстрирующего наличие такой возможности, на рис. 2.6 приведено сравнение мгновенного поля u -компоненты вектора скорости, полученного при решении нестационарных уравнений Навье-Стокса, с полем величины

$$\bar{u} + 0.3 \cdot \operatorname{Re}(\tilde{u}) / \max[|\operatorname{Re}(\tilde{u})|], \quad (2.23)$$

где \bar{u} это u -компонента базового стационарного решения (см. рис. 2.7a), а $\operatorname{Re}(\tilde{u})$ – вещественная часть u -компоненты собственного вектора, соответствующего собственному числу $\lambda = (-0.0435, 0.7399)$ при $Re = 60$ (см. рис. 2.7b). Видно, что эти поля качественно, а при выбранной амплитуде 0.3 (ее значение, конечно, не может быть найдено из линейной теории) даже количественно близки между собой.



**Рис. 2.6. Мгновенное поле продольной составляющей вектора скорости:
 а - решение нестационарных уравнений Навье-Стокса;
 б – результаты линейного анализа (соотношение (2.23))**

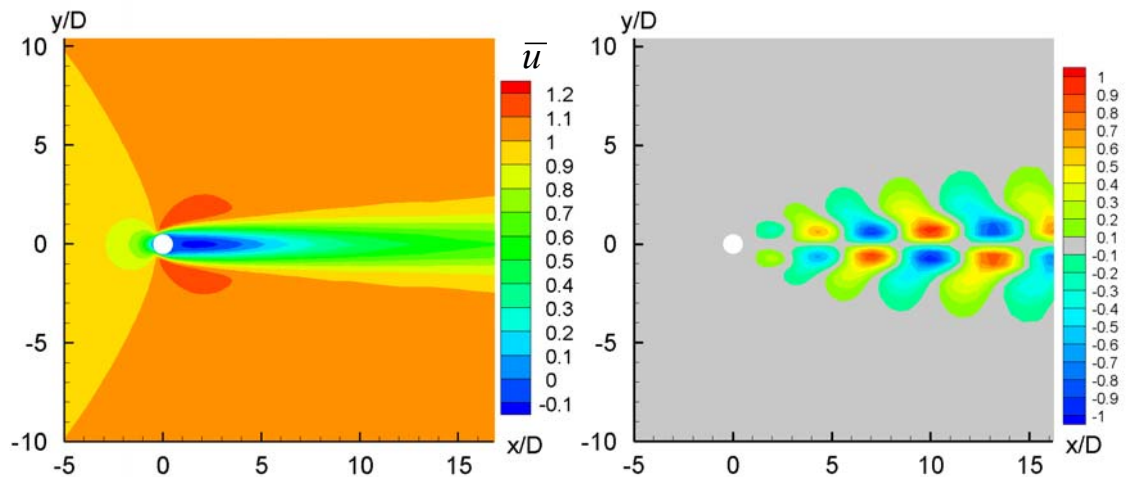


Рис. 2.7. Базовое стационарное решение \bar{u} и нормированный собственный вектор $\text{Re}(\tilde{u})/\max[|\text{Re}(\tilde{u})|]$ при $Re=60$

В качестве “побочного” результата проведенных расчетов следует отметить следующее. Как видно из рис. 2.7, собственный вектор в рассматриваемой задаче является антисимметричным. Это позволяет решать эту и аналогичные ей задачи не в полной, а в половине области с использованием стандартных граничных условий симметрии при $y = 0$ для базового решения

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial y} = 0, \quad \bar{v} = 0 \quad (2.24)$$

и антисимметричных граничных условий для амплитуд возмущений. Для получения последних введем матрицу отражения R относительно оси OX в плоскости XY :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Очевидно, что антисимметричная амплитуда возмущений должна удовлетворять соотношению

$$\tilde{\mathbf{q}}(x, y) = -R \cdot \tilde{\mathbf{q}}(x, -y), \quad (2.26)$$

которое позволяет получить следующие граничные условия для амплитуд возмущений при $y = 0$:

$$\tilde{\rho} = \tilde{u} = \tilde{w} = \tilde{T} = \tilde{v}_t = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0. \quad (2.27)$$

О точности данного подхода, позволяющего значительно сократить время расчета и затраты памяти, можно судить на основе сравнения результатов, полученных с его помощью, с аналогичными результатами, полученными при проведении расчета в полной области. Это сравнение представлено в таблице 2.4 и на рис. 2.8.

Таблица 2.4. Сравнение собственных чисел, полученных при расчете в полной области и в половине области с использованием условий (2.27) при $Re = 50$.

Тип расчета	Собственное число
Расчет в полной области	(- 0.011, 0.729)
Расчет в половине области	(- 0.012, 0.746)

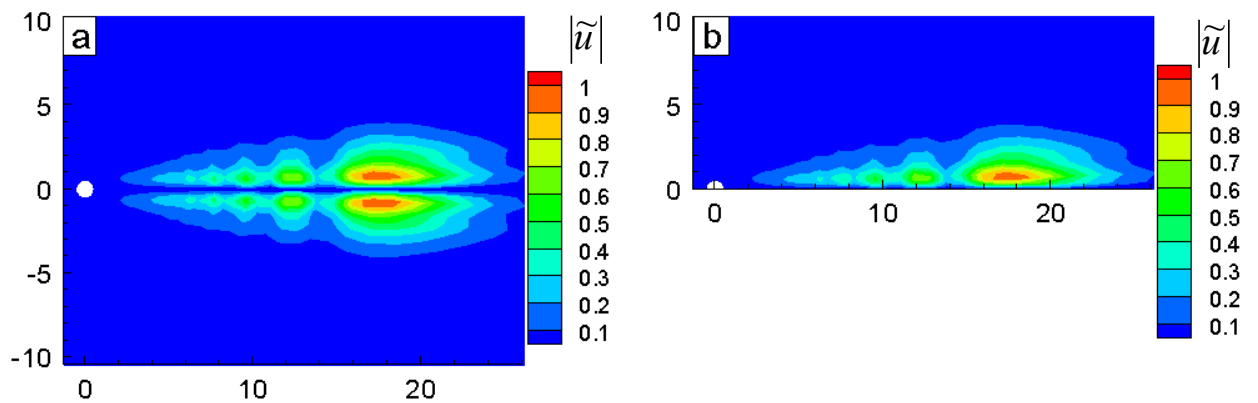


Рис. 2.8. Поля u -компоненты амплитуды собственного вектора, рассчитанные в полной (а) и половинной (б) областях при $Re = 50$.

Подводя итоги, можно констатировать, что представленные в данном разделе результаты тестирования разработанного алгоритма для линейного анализа устойчивости двумерных течений на примере обтекания круглого цилиндра достаточно убедительно свидетельствуют о корректности этого алгоритма и, тем самым, обосновывают возможность его использования для исследования условий возникновения автоколебаний в самых разнообразных течениях. Некоторые примеры таких исследований представлены в следующей главе диссертации.

ГЛАВА 3

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗРАБОТАННЫХ МЕТОДОВ

Данная глава посвящена применению представленных в первой главе методов к решению трех различных задач. В ее первом параграфе обсуждаются результаты исследования устойчивости квазитрехмерного ламинарного обтекания круглого цилиндра под ненулевым углом скольжения. Во втором параграфе рассматривается задача об определении условий возникновения крупномасштабных автоколебаний скачка уплотнения, которые могут возникать при трансзвуковом обтекании аэродинамических профилей (так называемый трансзвуковой бафтинг). В первом разделе этого параграфа изложена классификация типов трансзвукового бафтинга, обсуждаются предложенные в литературе механизмы этого явления и известные результаты его экспериментальных и расчетных исследований, а во втором – представлены полученные в настоящей работе результаты исследования наличия бафтинга в рамках ЛТУ. Заключительный третий параграф содержит пример применения метода оценки влияния малого внешнего воздействия на устойчивость следа плохообтекаемых тел к расчету ламинарного обтекания цилиндра, в следе которого расположен другой цилиндр малого диаметра.

3.1. Решение задачи об устойчивости ламинарного обтекания цилиндра под ненулевым углом скольжения (при наличии стреловидности)

Первой из решенных с использованием разработанного метода новых (не рассматривавшихся ранее с помощью ЛГУ) задач была задача об исследовании устойчивости следа при обтекании круглого цилиндра под ненулевым углом скольжения γ (см. рис. 3.1) к двумерным возмущениям.

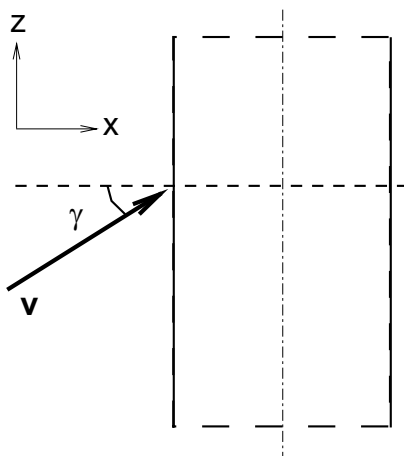


Рис. 3.1. Схема обтекания цилиндра под углом скольжения.

Исследование устойчивости данного течения представляет не только методический интерес с точки зрения апробации разработанной методики применительно к квазитрехмерным течениям, но и определенный практический интерес, поскольку ненулевой угол скольжения или иными словами “стреловидность” характерны для многих реальных течений.

Конкретные расчеты были выполнены при угле скольжения $\gamma = 30^\circ$. При этом расчет базового стационарного течения проводился в трехмерной постановке (НТС-код не имеет квазитрехмерной опции) с использованием условий периодичности в направлении z параллельном оси цилиндра (в направлении оси z расчетная область имела размер $0.5D$, а сетка по z содержала 5 ячеек). Размер расчетной области в плоскости XY составлял $125D$ (D – диаметр цилиндра), а размер сетки в этой плоскости был равен 160×160 . Как было показано в рассмотренном в предыдущей главе случае обтекания

цилиндра под нулевым углом скольжения, это обеспечивает вполне приемлемую точность решения дискретной задачи на собственные значения.

Результаты расчетов, выполненных как с помощью разработанной в настоящей работе методики, основанной на ЛТУ в предположении о квазитрехмерном характере стационарного течения и однородности возмущений по оси z (параметр β в (1.15) равен 0), так и с использованием нестационарных уравнений Навье-Стокса, показали, что рассматриваемое течение теряет устойчивость при значении числа Рейнольдса, построенного по модулю скорости набегающего потока V_∞ , $Re_c^{V_\infty} = 54$. Это означает, что критическое число Рейнольдса, построенное по проекции скорости набегающего потока на нормаль к оси цилиндра U_∞ , $Re_c^{U_\infty} = Re_c^{V_\infty} \cdot \cos(30^\circ) \approx 47$, совпадает с критическим числом Рейнольдса для поперечного (под нулевым углом скольжения) обтекания цилиндра.

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что характеристики устойчивости рассматриваемого течения при $\gamma \neq 0$ совпадают с соответствующими характеристиками при $\gamma = 0$ при скорости набегающего потока равной проекции скорости набегающего потока при ненулевом угле скольжения на нормаль к оси цилиндра:

$$U_\infty^{\gamma=0} = |V_\infty| \cdot \cos(\gamma), \quad (3.1)$$

и соответствующем числе Рейнольдса

$$Re^{U_\infty^{\gamma=0}} = Re^{V_\infty} \cdot \cos(\gamma). \quad (3.2)$$

3.2. Определение условий начала трансзвукового бафтинга при турбулентном обтекании аэродинамических профилей

3.2.1. Обзор экспериментальных и расчетных исследований явления трансзвукового бафтинга.

Одним из важнейших с практической точки зрения явлений, которое до настоящего времени не рассматривалось в рамках ЛТУ, являются глобальные автоколебания потока, приводящие к так называемому бафтингу, то есть к динамическому отклику конструкции летательного аппарата на нестационарное воздействие потока. Это явление впервые привлекло к себе внимание в 1930 году, когда в Англии, вследствие внезапно начавшихся сильных вибраций хвостового оперения потерпел крушение моноплан Юнкерс F 13 (Lee, 2001). С практической точки зрения, одним из наиболее опасных является трансзвуковой бафтинг (иногда называемый трансзвуковыми автоколебаниями), развивающийся при трансзвуковом режиме обтекания крыла (как правило, органа управления самолетом), когда автоколебания возникают в результате взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем и приводят к сильным колебаниям нагрузки на крыло из-за периодического возвратно-поступательного движения скачка вдоль его поверхности. Возникающие при этом вибрации органа управления значительно ограничивают маневренность и управляемость современных военных самолетов, а для гражданских самолетов являются недопустимыми. Более того, сильный трансзвуковой бафтинг представляет угрозу для любого типа летательных аппаратов, поскольку возникающие нагрузки могут привести к механическим разрушениям конструкции. Учитывая это, а также то обстоятельство, что крейсерская скорость большинства современных пассажирских и транспортных самолетов лежит в трансзвуковом диапазоне, можно с уверенностью утверждать, что знание условий возникновения трансзвукового бафтинга имеет исключительно важное практическое значение для конструирования и определения безопасных условий полета таких аппаратов. Между тем, хотя основные процессы, наблюдаемые при

трансзвуковом бафтинге, достаточно хорошо изучены, механизмы возникновения автоколебаний до сих пор остаются не вполне ясными. Остановимся на физической картине трансзвукового бафтинга несколько подробнее.

При превышении числом Маха набегающего потока некоторого значения, называемого критическим, вследствие ускорения потока при обтекании крыла в нем появляется сверхзвуковая область, обычно заканчивающаяся скачком уплотнения. Дальнейший рост числа Маха набегающего потока приводит к увеличению размеров сверхзвуковой зоны, усилению скачка и его сдвигу вниз по потоку. В результате, при определенном значении числа Маха, когда рост давления на скачке достигает достаточно большого значения, вниз по потоку от скачка происходит отрыв пограничного слоя от поверхности крыла. В некоторых случаях оторвавшийся пограничный слой может вновь присоединиться к поверхности, образуя так называемый отрывной пузырь. Такая ситуация схематически показана на рис. 3.2.

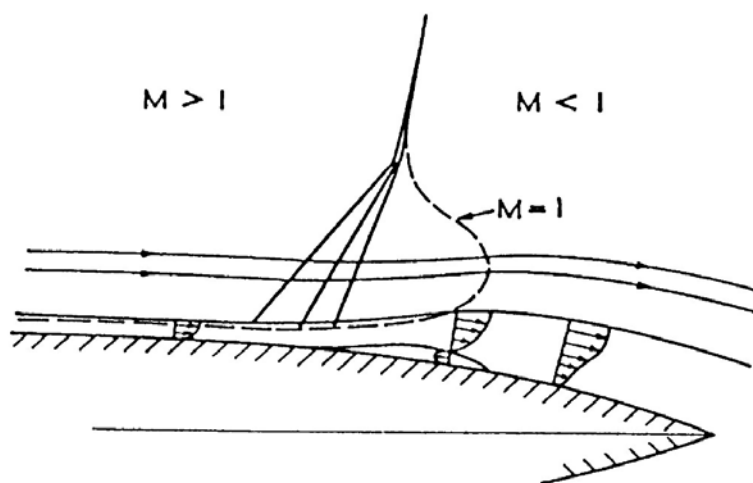


Рис. 3.2. Схема трансзвукового течения, в котором скачок уплотнения индуцирует возникновение отрывного пузыря

Для повышения критического значения числа Маха в современной авиации повсеместно применяются так называемые сверхкритические профили. Они характеризуются малой кривизной верхней поверхности, что позволяет уменьшить ускорение потока при ее обтекании и, тем самым сдвинуть скачок вниз по потоку и уменьшить его интенсивность. Вместе с тем, для увеличения

подъемной силы сверхкритические профили обычно имеют плавный отгиб вниз в хвостовой части, что может приводить к отрыву потока на задней кромке. Это явление может наблюдаться также на обычных (не сверхкритических) толстых профилях или при полете с достаточно большим углом атаки (Рис. 3.3).

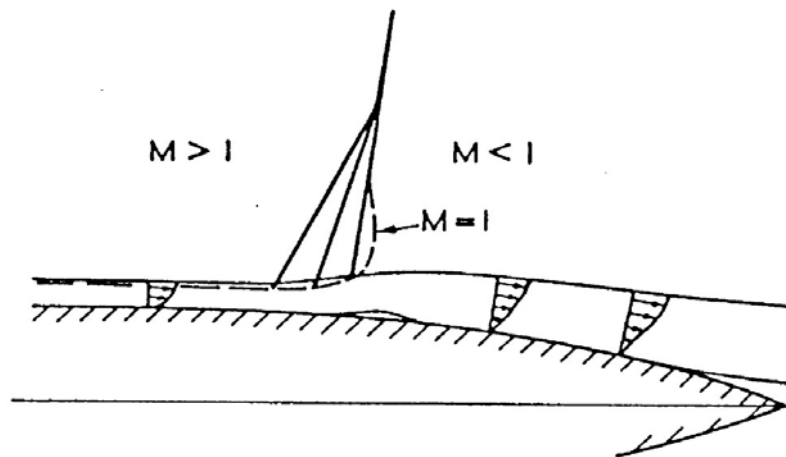


Рис. 3.3. Схема транзвукового течения, в котором поток отрывается с задней кромки профиля

Возникновение отрывного пузыря за скачком и отрыв потока вблизи задней кромки крыла могут взаимодействовать друг с другом через глобальную перестройку распределения давления вдоль поверхности крыла. Например, возникновение отрывного пузыря за скачком может инициировать отрыв пограничного слоя на задней кромке. Кроме того, возможен случай, когда отрывная зона за скачком простирается вплоть до задней кромки (см. рис. 3.4).

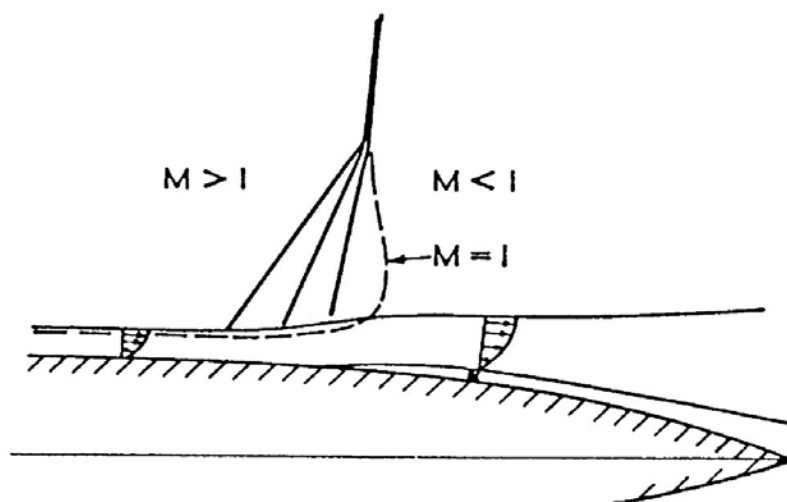


Рис. 3.4. Схема трансзвукового течения, в котором отрывная зона распространяется от скачка до задней кромки профиля

Что касается нестационарных режимов трансзвукового обтекания профилей, характеризующихся периодическими осцилляциями положения скачка уплотнения, то для них во многих работах используется классификация, предложенная в работе *Tijdeman, 1977*, в которой экспериментально исследовалось обтекание симметричного профиля *NACA 64A006* с закрылком, совершающим гармонические колебания с заданной частотой и амплитудой. При этом было выделено три типа движения скачка по поверхности профиля.

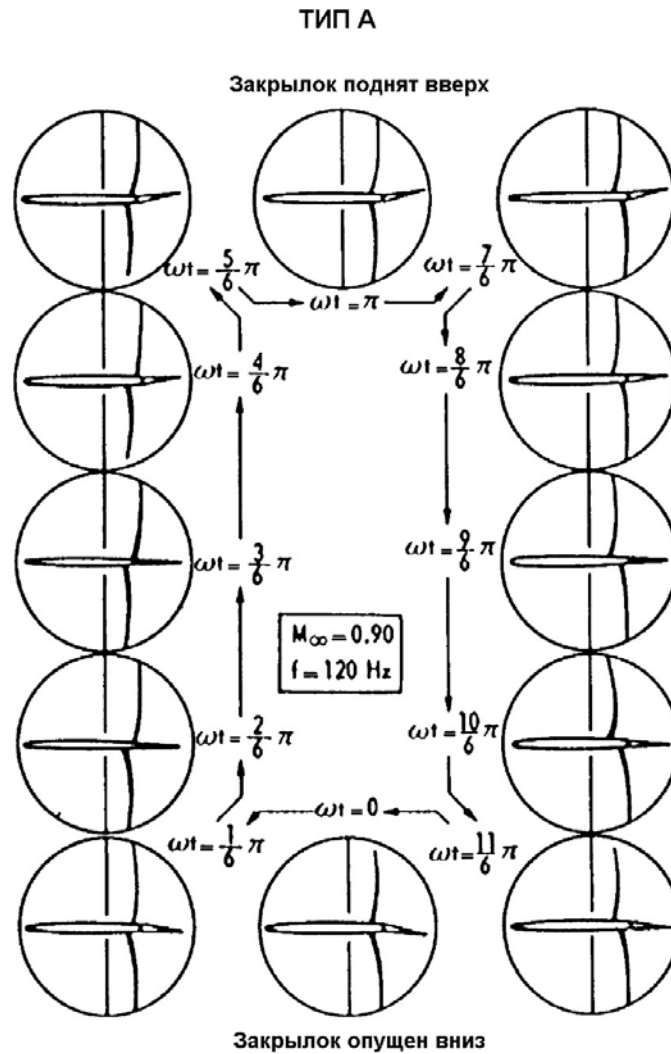


Рис. 3.5. Схема движения скачков типа А по профилю.

Тип А наблюдается при высоких трансзвуковых числах Маха (в рассматриваемом эксперименте $M = 0.9$). Он характеризуется почти синусоидальными колебаниями положения скачков на верхней и нижней поверхности профиля, происходящими в противофазе друг к другу (см. рис. 3.5).

При уменьшении числа Маха ($M = 0.875$) наблюдался тип В, при котором в процессе движения вверх по потоку интенсивность скачка падает, и в определенной фазе цикла он переходит в веер волн сжатия (см. рис. 3.6).

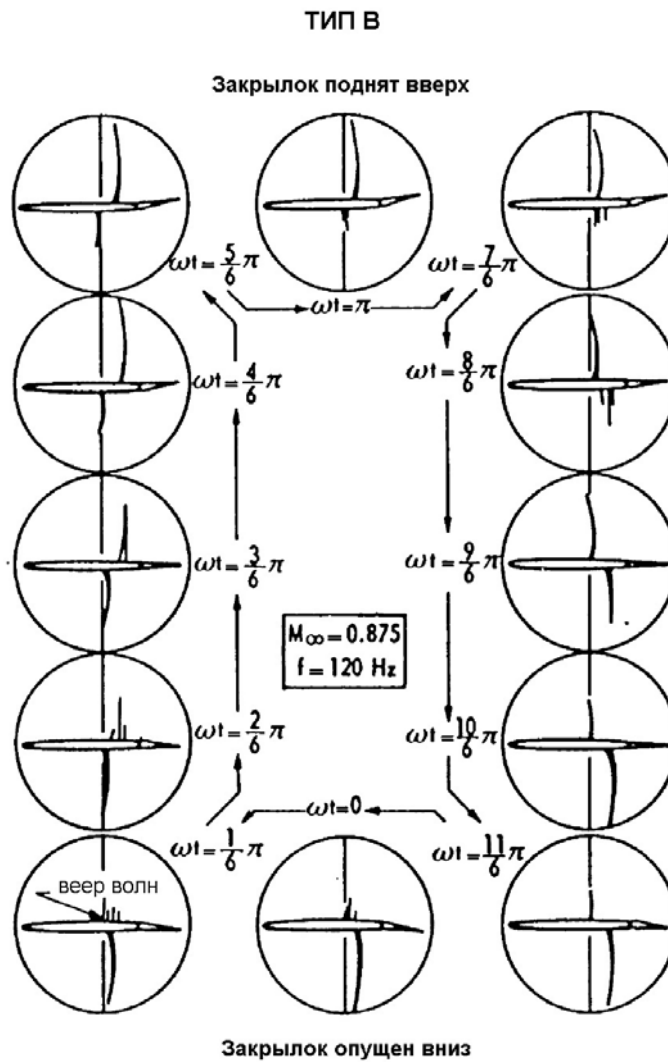


Рис. 3.6. Схема движения скачков типа В по профилю.

При дальнейшем уменьшении числа Маха ($M = 0.85$) развивается тип колебаний С. В этом режиме, скачок движется вверх по потоку и выходит за пределы профиля. После этого на поверхности профиля возникает веер волн сжатия, которые затем сливаются, формируя новый скачок, и цикл повторяется (см. рис. 3.7).

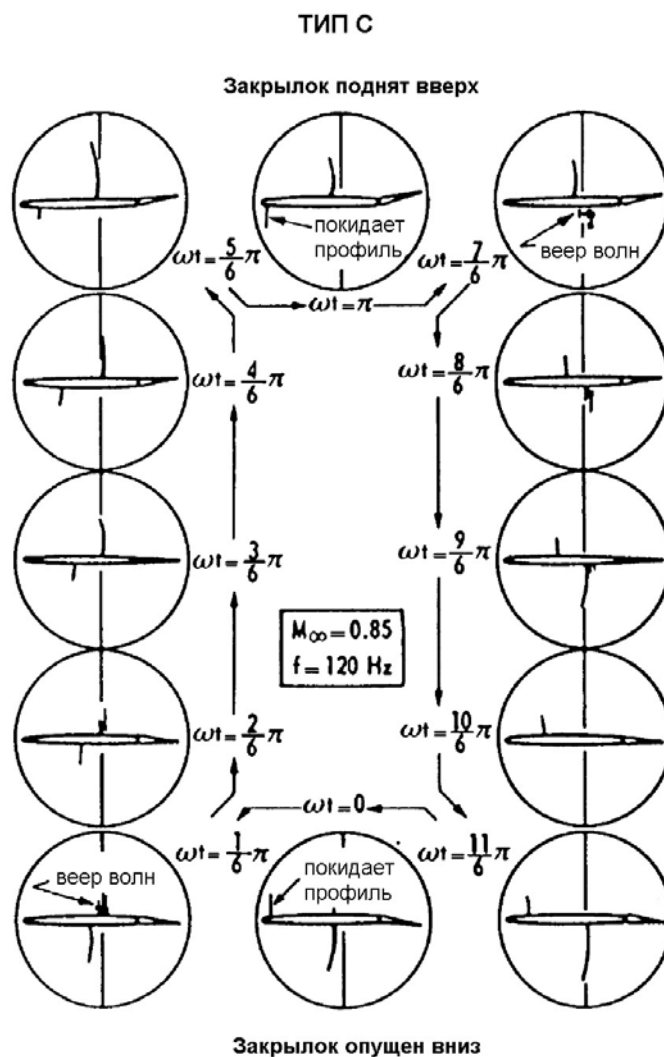


Рис. 3.7. Схема движения скачков типа С по профилю.

Рассмотренные выше режимы движения скачка, вызванного колебаниями закрылка, наблюдались также в экспериментах при отсутствии какого-либо нестационарного внешнего воздействия на поток, обтекающий профиль.

Так в работе (Lee, 1990) исследовались осцилляции скачка на верхней поверхности профиля вокруг некоторого среднего положения (тип А). Механизм этих осцилляций, предложенный в данной работе, основан на предположении о том, что отрывная зона за скачком простирается до конца профиля. При этом сдвиг скачка относительно его стационарного положения вызывает возмущения давления, которые распространяются в направлении задней кромки по отрывной зоне. Достигнув задней кромки, эти возмущения приводят к быстрому выравниванию давления в следе, что, в свою очередь,

влечет за собой генерацию волн давления, распространяющихся вверх по потоку вне пограничного слоя и приводящих к изменению направления движения скачка, поддерживая, таким образом, автоколебания потока. При таком механизме автоколебаний их период может быть вычислен как сумма времени распространения возмущений давления по отрывной зоне от скачка до задней кромки и времени, за которое волна, генерируемая в районе задней кромки, доходит до скачка.

Аналогичный механизм возможен и при малых углах атаки, когда скачки возникают на обеих поверхностях профиля. В этом случае смещение одного из скачков меняет распределение давления на соответствующей поверхности вниз по потоку от скачка. Выравнивание давления в следе снова приводит к возмущению поля давления уже на обеих поверхностях, а следовательно и к изменению положения обоих скачков.

В работе (*Stanewsky, Basler, 1990*) были представлены результаты экспериментального исследования трансзвукового бафтинга типа А при обтекании сверхкритического профиля CAST7/D0A1. Исследование частоты колебаний в зависимости от числа Маха, угла атаки и числа Рейнольдса, выполненной в этой работе, показало, что приведенная частота колебаний \bar{f} ($\bar{f} = 2\pi f \cdot t_0$, f – частота, t_0 – характерное конвективное время равное отношению длины хорды профиля к скорости набегающего потока) лежит в диапазоне от 0.3 до 0.6. Близкие значения частоты колебаний были получены при исследовании других сверхкритических профилей, например, для профиля BGK № 1 (*Lee, 1990*) и для профиля NASA SC(2)-0714 (*Bartels, Edwards, 1997*).

Наряду со сверхкритическими профилями, представляющими непосредственный практический интерес, ряд экспериментальных исследований был выполнен для модельных (симметричных) профилей.

Так, в работе *McDevitt, 1979* было проведено детальное экспериментальное исследование симметричного обтекания двояковыпуклого профиля с толщиной 18% хорды в диапазоне чисел Рейнольдса от 10^6 до 1.7×10^7 . При исследовании перехода от стационарного режима к нестационарному режиму и обратно в этой работе наблюдался гистерезис, то есть, при одном и том же числе Маха

набегающего потока в зависимости от направления его изменения (увеличение или уменьшение) реализовывалось стационарное или нестационарное течение (см. рис. 3.8). В последнем случае колебания скачков на верхней и нижней поверхности профиля происходили в противофазе. В основном в этих экспериментах наблюдались колебания типа С, хотя в некоторых режимах имели место колебания типа А. Следует отметить также, что наличие угла атаки (от 0° до 4°) не оказывало принципиального влияния на структуру течения, а приводило лишь к уменьшению области гистерезиса по числу Маха.

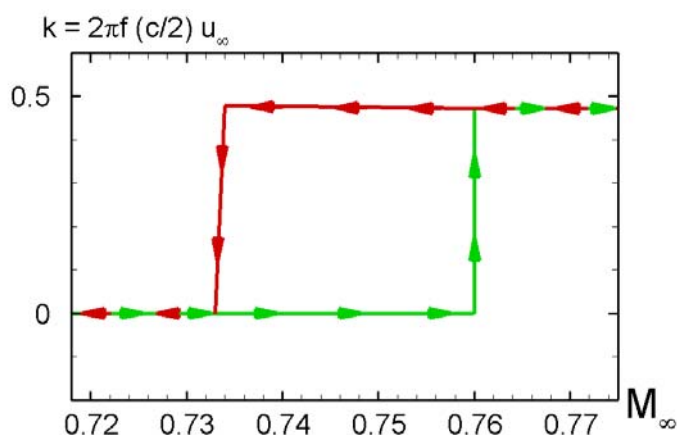


Рис. 3.8. Экспериментальная зависимость безразмерной частоты колебаний скачка от числа Маха (*McDevitt, 1979*).

Зеленая линия – при возрастании числа Маха, красная – при убывании

Экспериментальное исследование трансзвукового обтекания профиля NASA0012 под ненулевым углом атаки проводилось в работах *McDevitt, Okuno, 1985* и *Seifert, Pack, 1999*. При этом, в отличие от рассмотренного выше исследования *McDevitt, 1979*, колебания скачка наблюдались только на верхней поверхности профиля (на стороне разрежения), а гистерезис отсутствовал.

Таким образом, оценивая состояние экспериментальных работ, посвященных исследованиям трансзвукового бафтинга, можно констатировать, что, несмотря на большее количество таких исследований, общая картина этого сложного явления отсутствует, а данные по условиям начала трансзвукового бафтинга являются неполными и, зачастую, противоречивыми.

Что касается численных исследований трансзвукового бафтинга, то они были начаты достаточно давно. Первым таким исследованием является, по-

видимому, работа *Levy, 1978*, в которой, на основе нестационарных уравнений Рейнольдса (URANS), замкнутых с помощью алгебраической модели турбулентности, рассматривалось трансзвуковое обтекание 18%-го двояковыпуклого профиля. Удовлетворительное согласование полученных при этом результатов с экспериментом позволило автору сделать вывод о применимости URANS в сочетании со стандартными (построенными для стационарных сдвиговых течений) моделями турбулентности.

В относительно недавней работе *Rumsey et al., 1995* предпринята попытка воспроизвести экспериментальные результаты обсуждавшейся выше работы *McDevitt, 1979*. Как и в работе *Levy, 1978*, для этой цели использовались URANS, однако для их замыкания применялись другие модели турбулентности, в частности, алгебраическая модель Болдуина-Ломакса (*Baldwin, Lomax, 1978*) и дифференциальная модель переноса турбулентной вязкости Спаларта-Аллмареса (*Spalart, Allmaras, 1992*). Расчет производился для числа Рейнольдса 1.1×10^7 и чисел Маха в диапазоне от 0.72 до 0.76. В случае использования модели турбулентности Спаларта-Аллмареса в расчетах были получены колебания скачка типа C, причем расчетная частота колебаний и зависимость положения скачка от времени хорошо совпадали с результатами эксперимента. Кроме того, была довольно точно воспроизведена кривая гистерезиса. В противоположность этому, при использовании модели Болдуина-Ломакса для тех же условий были получены колебания типа A с гораздо меньшей амплитудой. Этот результат свидетельствует о сильной чувствительности результатов расчета бафтинга с помощью URANS к используемой модели турбулентности.

Численное исследование колебания скачка при обтекании профиля NASA0012 при условиях, повторяющих условия эксперимента *McDevitt, Okuno, 1985*, были проведены в работе *Barakos, Drikakis, 2000*. При этом оценивались возможности различных моделей турбулентности, в частности, Болдуина-Ломакса, Спаларта-Аллмареса, $k-\varepsilon$ моделей Лаундера-Шармы (*Launder, Sharma, 1974*) и Нагано-Кима (*Nagano, Kim, 1988*), и $k-\omega$ версии нелинейной модели Крафта (*Sofialidis, Prinos, 1997*). Для числа Рейнольдса 10^7

со всеми моделями турбулентности, за исключением $k-\varepsilon$ моделей, авторам удалось получить нестационарные решения хорошо согласующиеся с экспериментом, хотя значения критических углов атаки оказались при этом завышенными.

Наряду с URANS, в некоторых работах для анализа трансзвукового бафтинга использовались более простые подходы. Так, в работе *Bartels, 1998* трансзвуковое турбулентное обтекание профиля NASA0012 исследовалось на основе нестационарных уравнений тонкого вязкого слоя и на основе совместного решения уравнений Эйлера и турбулентного пограничного слоя с учетом вязко-невязкого взаимодействия. Последний метод позволил получить нестационарные решения, удовлетворительно совпадающие с экспериментом, тогда как с помощью параболических уравнений тонкого слоя нестационарных решений получить не удалось, что свидетельствует о существенной роли, которую играют при развитии трансзвукового бафтинга на этом профиле эллиптические эффекты. Вместе с тем, для сверхкритического профиля NASA SC(2)-0714 в той же работе оба метода позволили получить нестационарные решения с колебаниями скачка, хорошо согласующиеся с экспериментом *Bartels, Edwards, 1997*. Таким образом, можно предположить, что роль эллиптических эффектов в разных сценариях развития трансзвукового бафтинга различна.

Наиболее полным расчетным исследованием трансзвукового бафтинга при трансзвуковом обтекании сверхкритического профиля OAT15A является, по-видимому, недавно опубликованная работа *Deck, 2005*. Наряду с URANS в сочетании с моделью Спаларта-Аллмареса, в ней для расчета трансзвукового бафтинга впервые применен метод отсоединенных вихрей (DES). Этот подход, предложенный в работе *Spalart et al., 1998*, представляет собой гибрид RANS и LES и, как показано в ряде исследований (см., например, *Strelets, 2001*), значительно превосходит URANS при расчете течений с обширными зонами отрыва. Это преимущество DES было подтверждено и применительно к расчету трансзвукового бафтинга. В частности, оказалось, что использование URANS приводит к заметному завышению критических (соответствующих

началу автоколебаний) углов атаки (аналогичный результат был получен в работе *Barakos, Drikakis, 2000* для профиля NACA0012), в то время как при использовании DES эти углы удается предсказать довольно точно. Кроме того, с помощью DES удалось разрешить волны давления, распространяющиеся от задней кромки вверх по потоку к скачку, то есть подтвердить описанный выше гипотетический механизм автоколебаний *Lee, 1990*.

Нестационарное трансзвуковое обтекание сверхкритического профиля OAT15A исследовалось также *Thiery, Coustols, 2006*. Основное внимание в этой работе уделено ответу на вопрос о необходимости достаточно точного моделирования условий эксперимента, в частности, учета влияния стенок экспериментальной секции аэродинамической трубы при исследовании автоколебательных режимов течения. Расчеты, проведенные на основе URANS в сочетании с различными моделями турбулентности (модель Спаларта-Аллмареса, BSL и SST версии $k-\omega$ модели Ментера (*Menter, 1994*) и $k-kL$ модель *Daris, Beazard, 2002*) показали, что увеличение пульсаций давления, обусловленное верхней и нижней стенками, в значительной мере компенсируется влиянием боковых стенок. В результате, решения в двумерной постановке без учета стенок оказываются близкими к решениям в трехмерной постановке, полученным с учетом реальной геометрии рабочей секции трубы. Этот факт оправдывает правомочность двумерного подхода при сравнении результатов расчетов с экспериментальными данными, полученными в аэродинамических трубах. Также в этой работе было показано, что сам факт получения или неполучения нестационарного решения, а также амплитуда колебаний (в случае нестационарного течения) существенно зависят от используемой модели турбулентности. Наилучшее совпадение с экспериментом было достигнуто при использовании SST модели Ментера.

Суммируя основные результаты проведенного краткого обзора расчетных исследований явления трансзвукового бафтинга, можно сделать следующие выводы.

Во-первых, результаты расчетов, выполненных с использованием различных газодинамических моделей (уравнения тонкого слоя, совместное

решение уравнений Эйлера и пограничного слоя с учетом вязко-невязкого взаимодействия, URANS, DES) могут заметно отличаться друг от друга. Опираясь на результаты работы *Deck, 2005* можно сказать, что наиболее точные результаты получаются с помощью DES, однако использование этого подхода для систематических расчетов, необходимых для определения начала трансзвукового бафтинга, требует чрезмерно больших вычислительных ресурсов.

Во-вторых, выполненные исследования свидетельствуют о том, что результаты расчетов на основе URANS существенно зависят от выбора модели турбулентности. Этот вывод является вполне закономерным, поскольку подобная ситуация имеет место даже при расчете существенно более простых стационарных течений. Тем не менее, при использовании некоторых моделей, в частности, модели Спаларта-Аллмареса, применяемой в настоящей работе, в рамках URANS удается добиться неплохого согласования расчета условий начала трансзвукового бафтинга с экспериментом.

Наконец, как уже отмечалось в начале данного раздела, примеры применения к определению условий начала бафтинга методов, базирующихся на ЛТУ, в литературе отсутствуют. Поскольку данный метод позволяет рассчитать условия начала бафтинга с той же точностью, что и URANS, но при существенно меньших вычислительных затратах, попытка применения разработанного в диссертации аппарата к решению этой задачи, предпринятая в настоящей работе, представляется вполне оправданной.

3.2.2. Применение ЛТУ для расчета условий начала трансзвукового бафтинга при обтекании двояковыпуклого 18% симметричного профиля при нулевом угле атаки и профиля НАСА 0012.

В качестве первого объекта исследования для апробации разработанного подхода применительно к определению условий начала бафтинга было выбрано обтекание 18%-го двояковыпуклого симметричного профиля под нулевым углом атаки при числе Рейнольдса $Re = 1.1 \times 10^7$. Как уже отмечалось,

в экспериментах *McDevitt, 1979* при переходе данного течения от стационарного к нестационарному режиму и обратно наблюдался гистерезис: при возрастании числа Маха колебания скачков на обеих поверхностях профиля начинались при $M \approx 0.76$, а при его снижении течение становилось стационарным при $M \approx 0.733$ (см. рис. 3.8). С практической точки зрения наибольший интерес представляет нижняя граница кривой гистерезиса по числу Маха, поскольку при числах Маха меньше этого значения трансзвуковой бафтинг не может иметь места. Исследование же условий устойчивости стационарного решения на основе ЛТУ позволяет ответить на вопрос о том, при каком числе Маха это решение теряет устойчивость, то есть определить верхнюю по числу Маха границу гистерезиса.

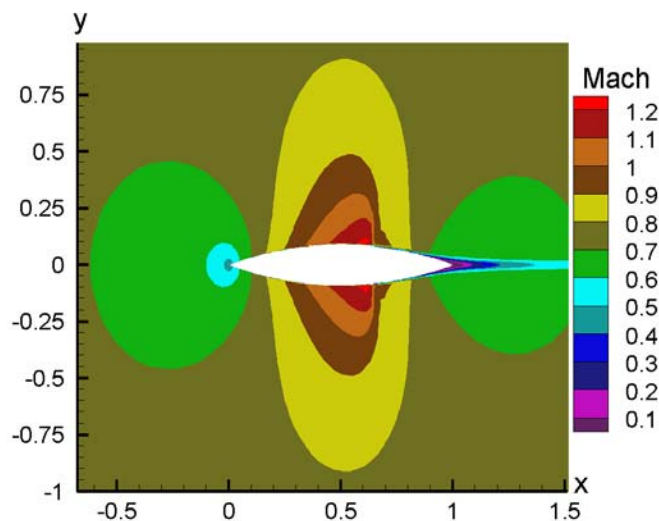


Рис. 3.9. Стационарное обтекание 18%-го двояковыпуклого симметричного профиля под нулевым углом атаки при $M=0.73$

Поскольку стационарное решение этой задачи является симметричным (рис. 3.9), его устойчивость, как было показано в Главе 2 на примере круглого цилиндра, можно исследовать в половинной области. При этом в качестве граничных условий на плоскости для стационарного решения используются условия симметрии

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial y} = 0, \quad \bar{v} = 0, \quad (3.3)$$

а для возмущений, являющихся антисимметричными, – условия вида

$$\tilde{\rho} = \tilde{u} = \tilde{T} = \tilde{v}_t = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0. \quad (3.4)$$

Основные исследования линейной устойчивости рассматриваемого течения были выполнены на сравнительно грубой сетке размером 145×84 , показанной на рис. 3.10, что, главным образом, обусловлено ограниченностью оперативной памяти компьютера, на котором проводились расчеты (1 гигабайт).

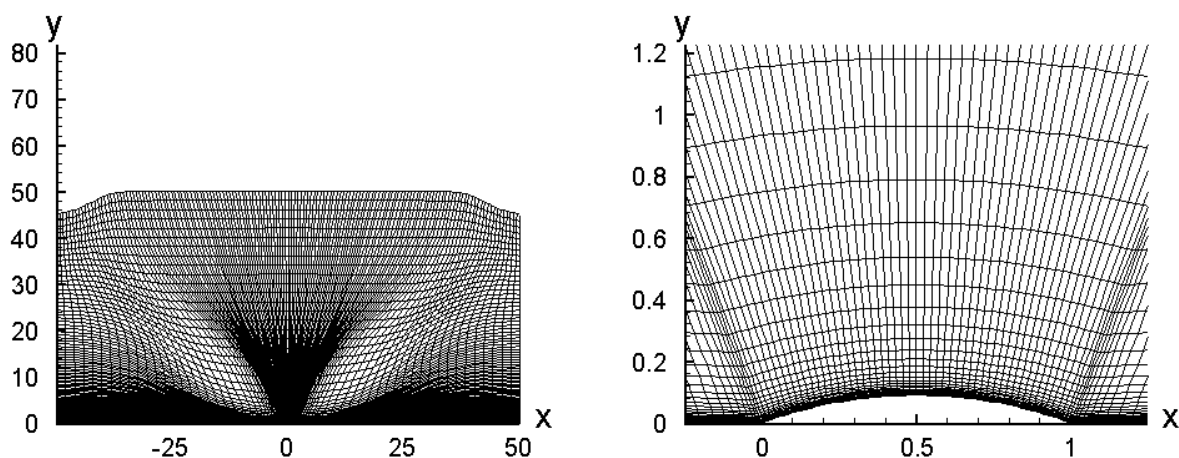


Рис. 3.10. Расчетная сетка, использовавшаяся для анализа линейной устойчивости при обтекании 18% симметричного двояковыпуклого профиля под нулевым углом атаки

Тем не менее, данная сетка оказывается вполне достаточной для получения практически сошедшего по сетке стационарного решения. Об этом свидетельствует сравнение представленных на рис. 3.11 стационарных полей давления при $M=0.73$, рассчитанных на этой сетке и на существенно более мелкой сетке с размером 209×115 (в окрестности профиля шаги этой сетки по обоим направлениям меньше, чем шаги базовой сетки, примерно в 1.5 раза). Тот же вывод можно сделать и на основе сопоставления распределений коэффициента давления $C_p = 2p/(\rho U_\infty^2)$, рассчитанных на грубой и мелкой сетках (см. рис. 3.12).

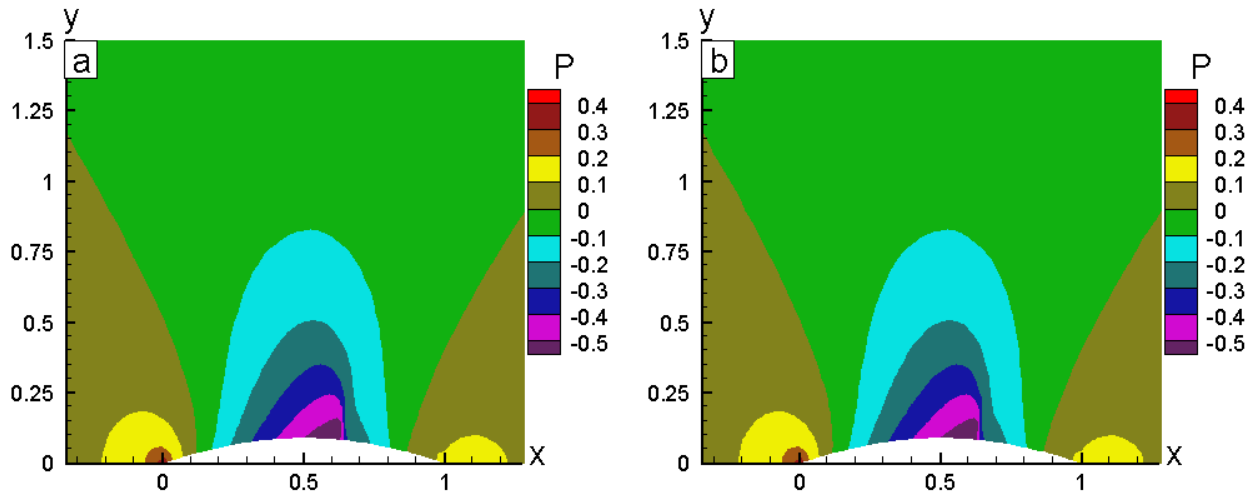


Рис. 3.11. Поля давления, рассчитанные с использованием двух сеток:
(a) - 145×84, (b) - 209×115

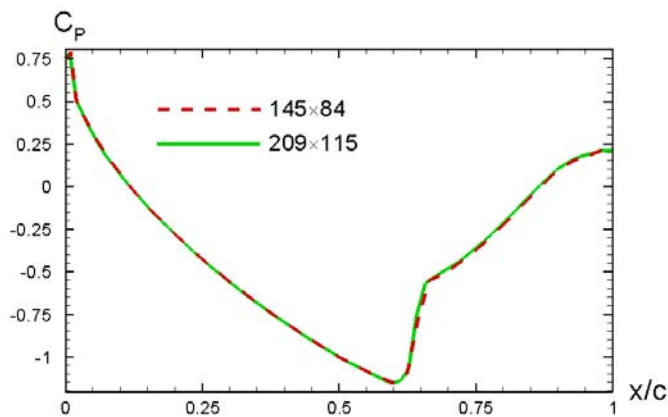


Рис. 3.12. Распределение коэффициента давления C_p по поверхности профиля,
рассчитанное с использованием двух сеток.

При исследовании линейной устойчивости рассматриваемого течения использовалось несколько подходов к вычислению возмущений турбулентной вязкости (см. раздел 1.2.2).

В рамках первого подхода линеаризованное уравнение модели турбулентности Спаларта-Аллмараса не включается в систему уравнений для возмущений, то есть возмущения турбулентной вязкости полагаются равными нулю. В рамках второго подхода производится линеаризация упрощенной версии модели Спаларта-Аллмараса, в которой опущены члены, описывающие влияние вязких эффектов вблизи стенки (так называемая высокорейнольдсовая

версия). Наконец, третий и наиболее строгий подход базируется на линеаризации всех членов данной модели, за исключением членов, описывающих переход к турбулентности в заданной точке обтекаемой поверхности.

Наряду с линейным анализом устойчивости рассматриваемого течения, были проведены его расчеты на основе URANS. При этом, учитывая несимметричность нестационарного решения, численное интегрирование URANS проводилось не в половине, как в случае поиска стационарного решения, а в полной области, расчетная сетка для которой была получена путем отражения сетки, используемой для половины области (см. рис. 3.13), относительно плоскости симметрии. При этом для более эффективного распараллеливания алгоритма при проведении расчетов на компьютерном кластере полученная таким образом сетка разбивалась на 4 блока (см. рис. 3.13)

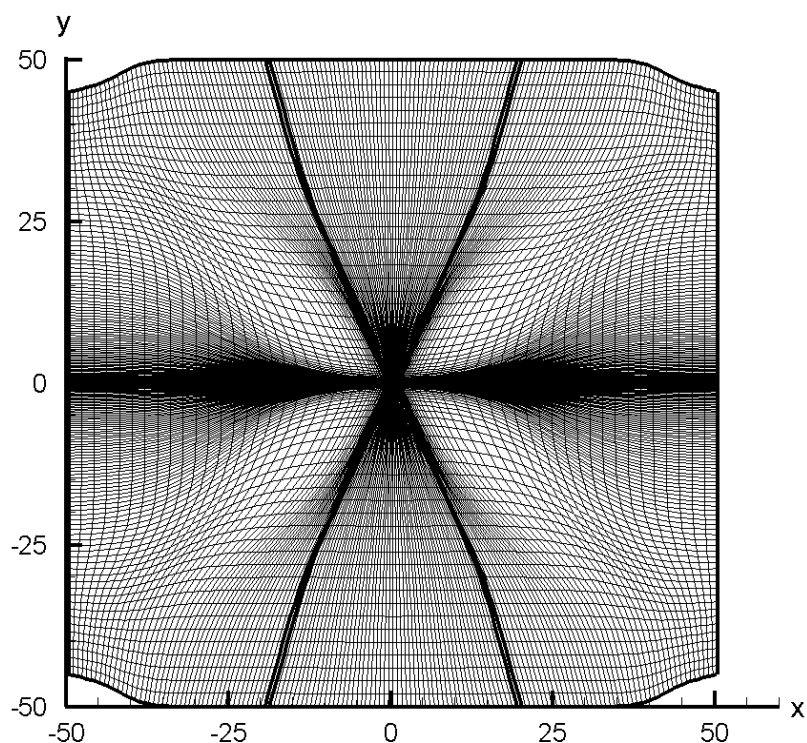


Рис. 3.13. Четырехблочная сетка в полной области, использовавшаяся для решения URANS при расчете 18% двояковыпуклого симметричного профиля

Как уже отмечалось, данная сетка является достаточной для получения практически сошедшегося по сетке стационарного решения. Это, однако, не гарантирует, что она достаточна также для получения достаточно точных нестационарных решений URANS и условий начала автоколебаний на основе линейного анализа устойчивости. Для выяснения этого вопроса расчеты по URANS были выполнены на двух сетках, грубой (показанной на рис. 3.13) и мелкой (полученной из описанной выше сетки 209×115 путем отражения от плоскости симметрии). Границы гистерезиса, определенные в результате этих расчетов, приведены в таблице 3.1, из которой видно, что различия в числе Маха начала и конца гистерезиса на двух сетках не превышают 0.2%.

Таблица 3.1 Влияние размеров сетки на границы гистерезиса по числу Маха, полученных в рамках URANS

Сетка	Число Маха начала гистерезиса	Число Маха конца гистерезиса
145×168	0.726	0.733
209×230	0.728	0.734

Рассмотрим далее результаты определения начала бафтинга, полученные на основе линейного анализа устойчивости рассматриваемого течения и их согласование с приведенными в таблице 3.1 границами гистерезиса, полученными из решения URANS на грубой сетке.

Прежде всего, следует отметить, что анализ линейной устойчивости с максимально полной линеаризацией модели турбулентности позволяет получить значение критического числа Маха и частоту колебаний, с высокой степенью точности совпадающие с соответствующими результатами решения URANS (см. таблицу 3.2), получение которых требует несоизмеримо больших вычислительных затрат. Этот вывод является очень важным и убедительно свидетельствует о высокой вычислительной эффективности разработанного подхода к определению условий устойчивости стационарных уравнений Рейнольдса на основе ЛТУ.

Таблица 3.2 Число Маха, при котором стационарное течение теряет устойчивость

	Число Маха потери устойчивости M_c	Безразмерная частота k
URANS	0.733	0.43
ЛТУ с полной линеаризацией модели турбулентности	0.735	0.42
ЛТУ с частичной линеаризацией модели турбулентности	0.735	0.41
ЛТУ без линеаризации модели турбулентности	0.703	0.24

Из таблицы 3.2 также следует, что критическое число Маха и частота колебаний, рассчитанные на основе ЛТУ с использованием полной и частичной линеаризацией модели турбулентности, практически совпадают между собой и существенно отличаются от соответствующих результатов, полученных без учета возмущений турбулентной вязкости. Таким образом, учет возмущений турбулентной вязкости является необходимым условием правильного определения условий начала бафтинга на основе ЛТУ, однако при этом, по крайней мере, при использовании модели турбулентности Спаларта-Аллмареса нет необходимости в линеаризации низкорейнольдсовых членов, что значительно упрощает систему уравнений для возмущений и решение задачи на собственные значения.

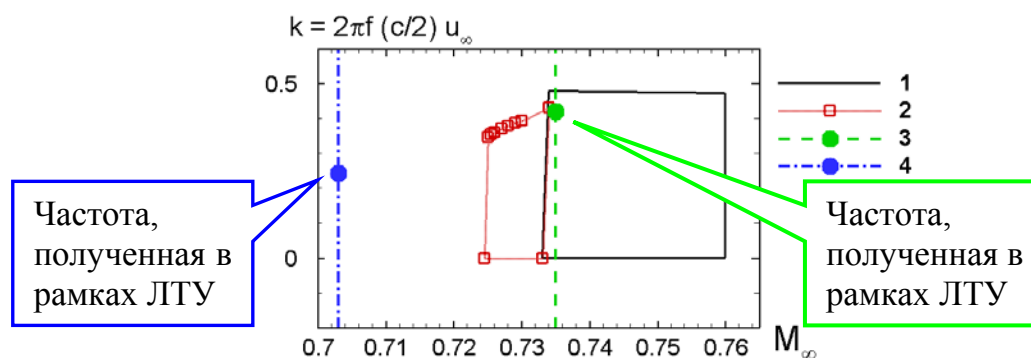


Рис. 3.14. Сравнение расчетной зависимости безразмерной частоты колебаний от числа Маха с экспериментом. 1 – эксперимент (McDevitt, 1979), 2 – URANS, 3 – ЛТУ с линеаризацией модели, 4 – ЛТУ без линеаризации.

В заключение остановимся на сравнении полученных результатов с экспериментальными данными. Как видно из рис. 3.14, как результаты расчетов кривой гистерезиса на основе URANS, так и значения критического числа Маха, рассчитанные с помощью URANS и на основе ЛТУ, существенно отличаются от соответствующих экспериментальных данных *McDevitt, 1979*. Наиболее вероятной причиной этого является, по-видимому, неадекватность используемой модели турбулентности в рассматриваемых нестационарных условиях. Наряду с этим, определенное влияние на точность полученных результатов может оказывать неполное воспроизведение в расчетах условий эксперимента. В частности, измерения проводились в рабочей секции аэродинамической трубы, представляющей собой канал прямоугольного сечения, а расчеты были выполнены в двумерной постановке без учета наличия стенок (как было показано в недавней работе *Thiery, Coustols, 2006*, учет наличия верхней и нижней стенок рабочей секции может заметно сказываться на устойчивости течения). Наконец, еще одним возможным фактором, приводящим к рассогласованию расчета с экспериментом может служить проведение расчетов в предположении о том, что пограничный слой на поверхности профиля является полностью турбулентным, в то время как результаты исследования устойчивости пограничного слоя на рассматриваемом профиле (*Crouch, 2004*), показали, что при $M \approx 0.73$ пограничный слой остается ламинарным вплоть до скачка. Таким образом, для выяснения конкретных причин наблюдаемого рассогласования расчета с экспериментом необходимы систематические исследования, включающие повторение расчетов с использованием других моделей турбулентности, с учетом влияния стенок рабочей секции аэродинамической трубы в экспериментах и с учетом наличия на профиле протяженного участка с ламинарным пограничным слоем.

Остановимся далее кратко на результатах выполненного в настоящей работе исследования условий начала бафтинга при трансзвуковом обтекании профиля NACA 0012.

Проведенные расчеты показали, что в этом случае результаты URANS и линейного анализа также согласуются между собой, однако при этом в

широком диапазоне изменения угла атаки (от 0 до 6 градусов) и числа Маха (от 0.72 до 0.85) оба подхода предсказывают отсутствие бафтинга. Этот факт не только противоречит результатам экспериментальных исследований *McDevitt, Okuno, 1985* и *Seifert, Pack, 1999*, что можно было бы объяснить недостатками модели турбулентности Спаларта-Аллмараса, но не согласуется также с уже упоминавшимися выше расчетами *Barakos, Drikakis, 2000*, выполненными в рамках URANS с использованием различных моделей турбулентности, в том числе, модели Спаларта-Аллмараса. Следует однако отметить, что последние проводились на временных интервалах, не превышающих 60 конвективных времен ($t \cdot c / U_\infty$), что является недостаточным для каких-либо выводов о наличии или отсутствии нестационарного решения рассматриваемой задачи. В качестве примера на рис. 3.15 показана временная зависимость коэффициента подъемной силы, полученная в настоящей работе при численном интегрировании URANS при $M=0.78$ и угле атаки 3.5° . Из рисунка видно, что затухание колебаний происходит крайне медленно, и что вывод о нестационарности решения, который можно было бы сделать на основе анализа решения на отрезке $t < 60$, является неверным.

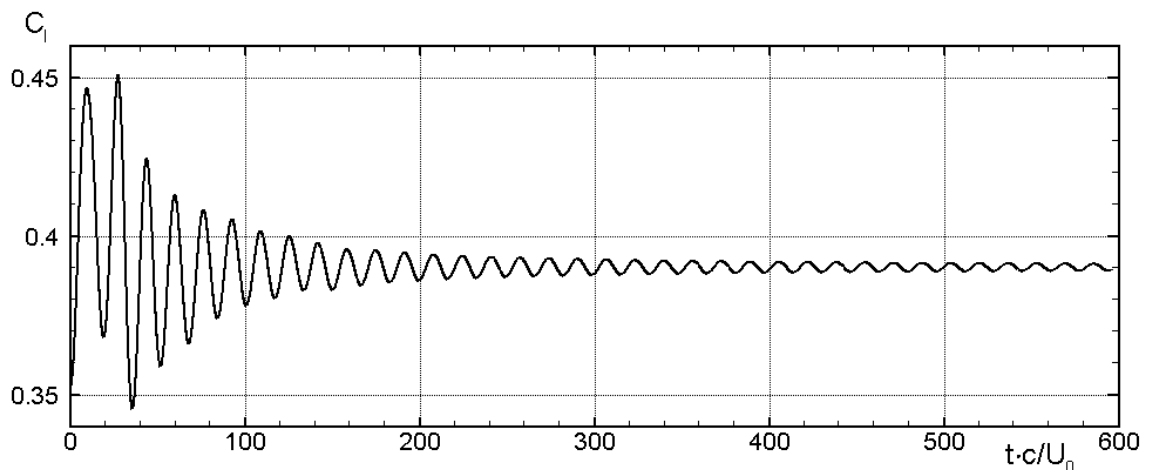


Рис. 3.15. Зависимость коэффициента подъемной силы от времени при расчете с использованием модели Спаларта-Аллмараса с поправкой на сжимаемость при $M=0.78$ и угле атаки 3.5°

В заключение отметим, что независимо от реальных причин рассогласования полученных в настоящей работе результатов анализа

устойчивости трансзвукового обтекания профиля НАСА 0012 с экспериментом, эти результаты являются наглядной иллюстрацией полезности развитого в диссертации подхода (исследование устойчивости стационарных решений уравнений Рейнольдса на основе ЛТУ) для выяснения вопроса о том, обусловлен ли факт отсутствия или наличия нестационарного решения URANS объективными причинами (устойчивостью стационарного течения), недостаточно длинными временными интервалами, на которых проводятся расчеты или недостатками используемого численного алгоритма (например, его избыточной численной диссипации).

3.3. Решение задачи о влиянии цилиндра малого диаметра, помещенного в след большого цилиндра, на устойчивость его обтекания

Представленный в разделе 1.3 приближенный метод оперативной оценки характера и степени влияния малых возмущений на устойчивость течения, основанный на использовании решения сопряженной задачи на собственные значения, был применен для исследования устойчивости поперечного обтекания цилиндра при наличии в его следе другого цилиндра малого диаметра. Как уже отмечалось в разделе 1.3.1., ранее данное течение экспериментально исследовалось в работе *Strykowski, Sreenivasan, 1990*, а его расчетное исследование было выполнено в работе *Hill, 1992* с использованием решения сопряженной задачи на собственные значения в рамках модели несжимаемой жидкости. Оба исследования показали, что в зависимости от положения цилиндра в следе, происходит стабилизация или дестабилизация течения. В настоящей работе данная задача решена с использованием обобщения метода *Hill, 1992* на случай сжимаемых течений (в большинстве расчетов число Маха полагалось равным 0.2) в сочетании с алгоритмом решения обобщенной дискретной задачи на собственные значения, подробно описанным в Главе 1 диссертации.

Из-за ограниченности объема оперативной памяти, расчеты проводились на относительно грубой сетке 120×100 в области с размером равным $200D$, показанной на рис. 3.16 (столь большой размер расчетной области использовался с целью исключения возможного влияния возмущений, распространяющихся от внешней границы на решение сопряженной задачи на собственные значения). Следует однако отметить, что эта сетка сгущена в области сильного изменения сопряженного собственного вектора (см. приведенный ниже рис. 3.17), что позволяет надеяться на приемлемую точность решения, полученного с ее использованием.

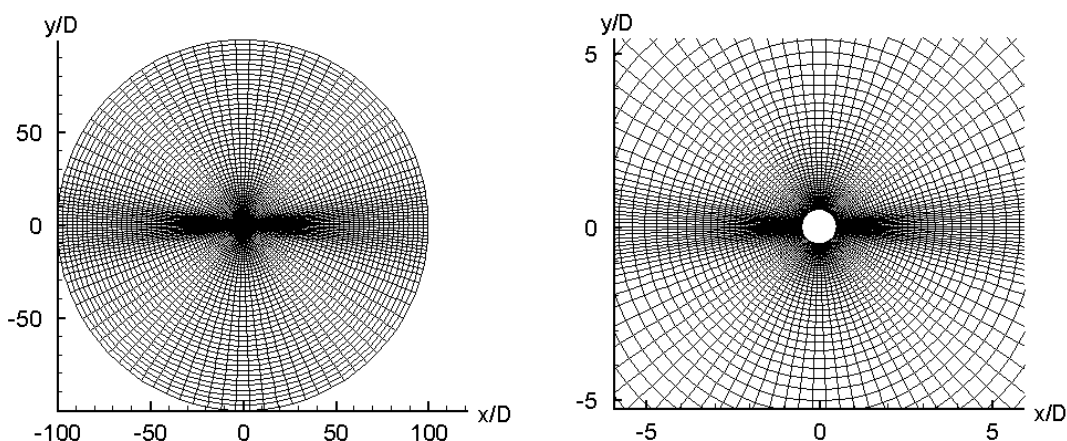


Рис. 3.16. Основная расчетная сетка, использовавшаяся для решения рассматриваемой задачи в рамках приближенной методики (в предположении о малости объемной силы)

В соответствии с разработанным подходом на первом этапе расчета была решена задача об устойчивости течения вокруг цилиндра при отсутствии внешних воздействий. При этом матрица коэффициентов уравнений для амплитуд возмущений вычислялась с использованием двух разностных схем: центрально-разностной схемы 4-го порядка и противопоточной схемы 3-го порядка. Расчеты были выполнены при $Re = 50$. В результате, в обоих случаях было получено единственное собственное число с отрицательной вещественной частью. Как видно из таблицы 3.3, его величина заметно зависит от используемой схемы. Тем не менее, оба значения удовлетворительно согласуются с результатами решения рассматриваемой задачи, полученными в разделе 2.2 с использованием центрально-разностной схемы 4-го порядка на существенно более мелкой сетке 240×240 при меньшем диаметре расчетной области $125D$ ($\lambda = (-1.0 \cdot 10^{-2}, 0.732)$).

Таблица 3.3. Собственные числа для задачи об устойчивости поперечного обтекания цилиндра на рассматриваемой сетке

Схема	Собственное число
Центрально-разностная	$(-1.12 \cdot 10^{-2}, 0.729)$
Противопоточная	$(-0.92 \cdot 10^{-2}, 0.728)$

Затем, с использованием тех же двух разностных схем была решена сопряженная задача на собственные значения (1.76). Поля полученных при

этом амплитуд u - компоненты сопряженных собственных решений представлены на рис. 3.17. При анализе этих полей обращает на себя внимание их “шумность” и немонотонность, более ярко выраженные в случае симметричной схемы 4-ого порядка.

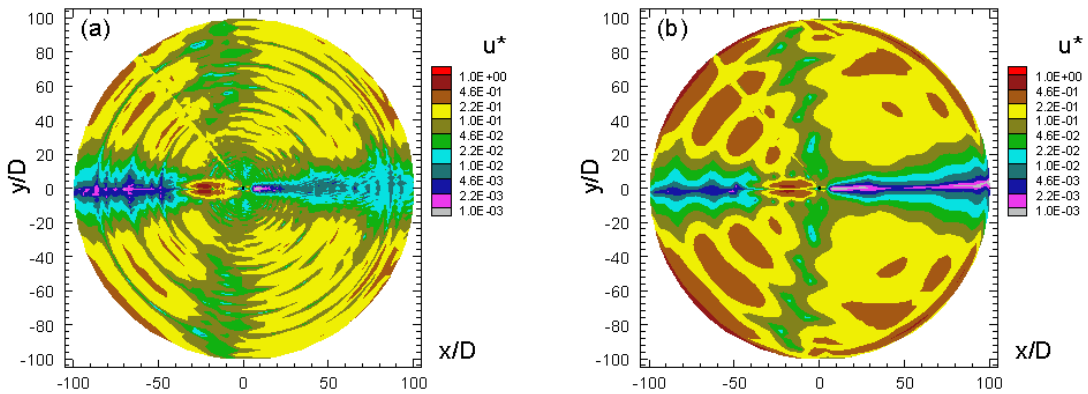


Рис. 3.17. Нормированное поле u - компоненты амплитуды собственного вектора сопряженного оператора:
(а) расчет по центрально-разностной схеме 4-го порядка;
(б) – по противоточной 3-го порядка

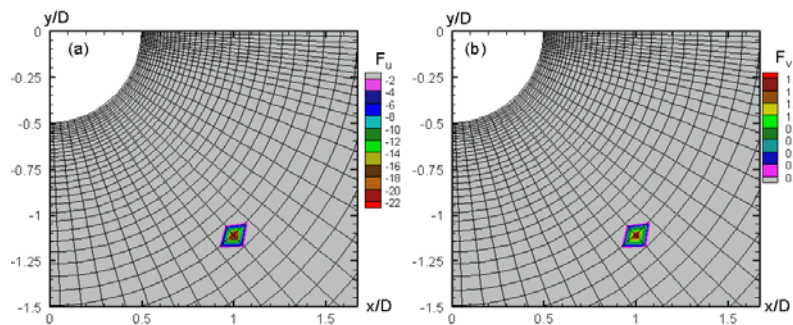


Рис. 3.18. Продольная и поперечная составляющие объемной силы, приложенной в точке $(x, y) = (1.0, -1.1)$.

Далее, в результате решения системы линейных алгебраических уравнений (1.80) определялся сдвиг стационарного поля $\Delta \bar{a}$, обусловленный приложением объемной силы, моделирующей воздействие на рассматриваемое течение цилиндра малого диаметра, помещенного в некоторую точку следа основного цилиндра. При этом, как и в работе *Hill, 1992*, объемная сила задавалась в форме δ -функции, “размазанной” на одну ячейку сетки (см. рис. 3.18):

$$\bar{\mathbf{f}} = C_d(\text{Re}_s) \cdot \frac{d_s}{V} \cdot \frac{\rho |\vec{U}| \vec{U}}{2} = C_d(\text{Re}_s) \cdot \text{Re}_s \cdot \frac{\mu \vec{U}}{2V}, \quad (3.5)$$

где V – объем ячейки сетки, $\text{Re}_s = \frac{\rho |\vec{U}| d_s}{\mu}$ – число Рейнольдса, построенное по диаметру малого цилиндра d_s и локальной скорости $|\vec{U}|$, а коэффициент сопротивления $C_d(\text{Re}_s)$ определялся с помощью эмпирической зависимости

$$C_d(\text{Re}_s) = \frac{1}{\text{Re}_s \cdot (a + b \ln(\text{Re}_s))}, \quad a = 0.0798, b = -0.0194. \quad (3.6)$$

На рис. 3.19 приведены поля определенного в результате расчета сдвига продольной и поперечной компонент скорости Δu и Δv (соответствующих компонент $\Delta \bar{\mathbf{a}}$). Следует отметить, что в непосредственной близости к точке приложения объемной силы эти величины близки по порядку к единице, что находится в некотором противоречии с допущением об их малости, используемым при выводе соотношений (1.73) и (1.75). Однако при удалении от этой точки они быстро падают. Это позволяет надеяться на то, что связанная с указанным противоречием ошибка невелика.

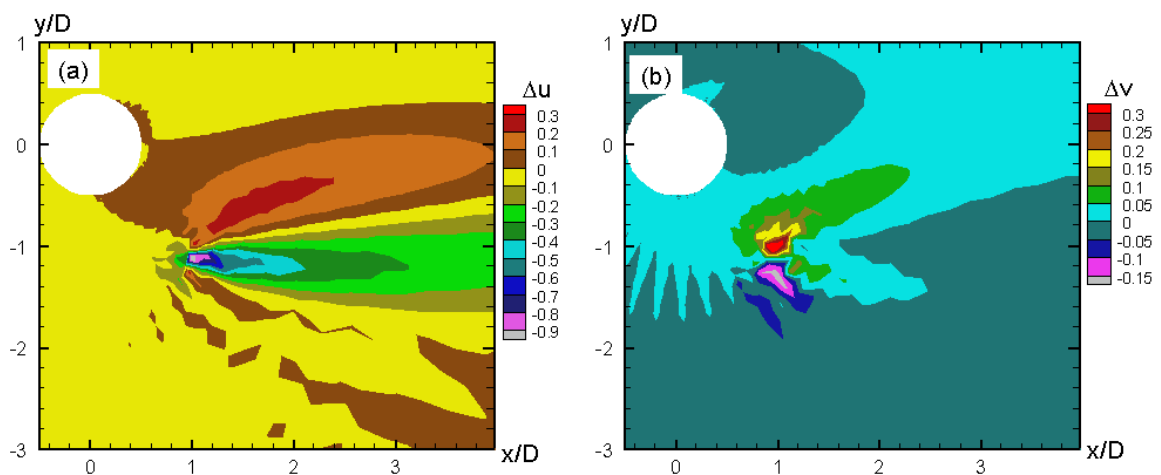


Рис. 3.19. Сдвиг стационарного поля продольной (а) и поперечной (б) компонент скорости под действием объемной силы.

На заключительном этапе расчета, с помощью формулы (1.82) вычисляется поле сдвига собственного числа невозмущенного течения $\Delta \lambda$, вызванного

приложением объемной силы в различных точках следа. Отметим, что, несмотря на упоминавшееся выше видимое различие между полями сопряженных собственных решений, полученных с помощью центрально-разностной и противопоточной схем (см. рис. 3.17), поле $\Delta\lambda$ оказывается практически нечувствительным к используемой схеме (см. рис. 3.20).

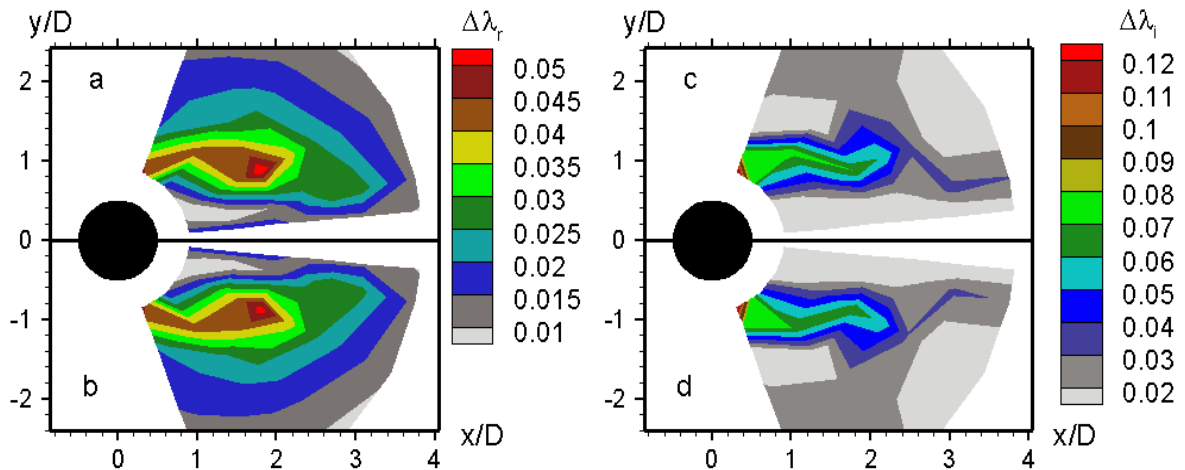
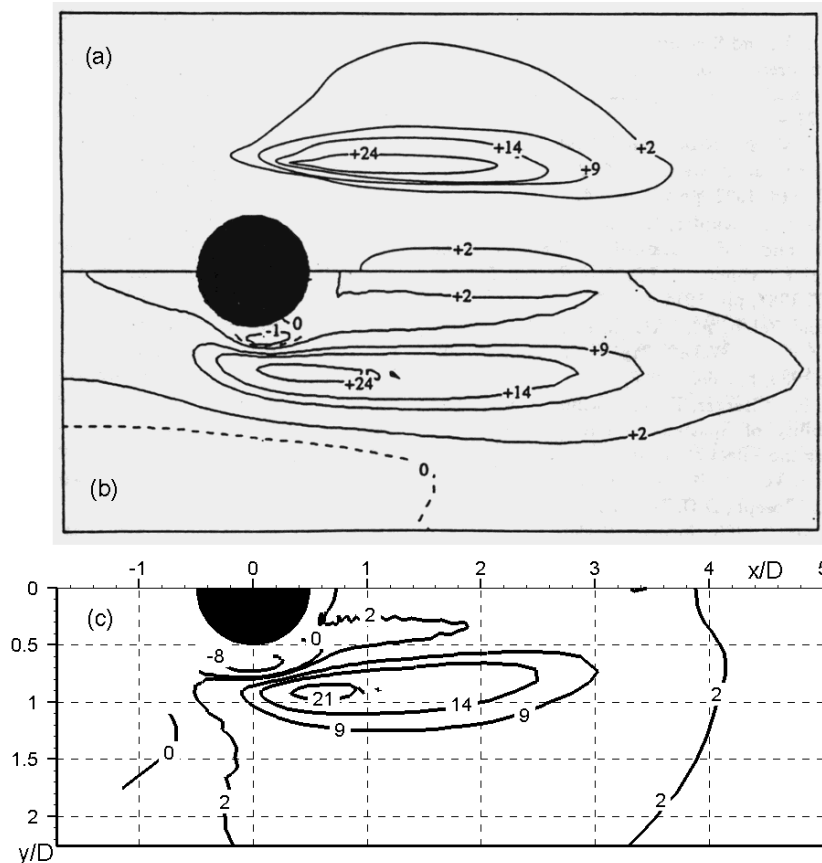


Рис. 3.20. Поля сдвига вещественной (a, b) и мнимой (c, d) собственной числа для центрально-разностной (a, c) и противопоточной схем (b, d).

На рис. 3.21 представлено сравнение результатов данной работы с результатами расчетов Хилла и с экспериментальными данными *Strykowski, Sreenivasan, 1990* по величине сдвига критического числа Рейнольдса, обусловленного приложением объемной силы. Эта величина рассчитывается по формуле (*Hill, 1992*)

$$\Delta Re_c = Re_c \frac{\Delta\lambda_r/A}{1 - \Delta\lambda_r/A}, \quad A = 0.2, \quad (3.7)$$

полученной с использованием допущения о том, что сдвиг вещественной части собственного числа не зависит от числа Рейнольдса.



**Рис. 3.21. Сдвиг критического числа Рейнольдса $\Delta Re_c(x, y)$, вызванный возмущением следа в точке (x, y) :
 (а) – эксперимент *Strykowski, Sreenivasan, 1990*;
 (б) – расчет Хилла; (с) - расчет настоящая работа**

Как видно из рисунка, качественно все результаты согласуются между собой, однако максимальное значение сдвига критического числа Рейнольдса, полученное в настоящей работе, несколько занижено по сравнению не только с экспериментом, но и с результатами расчетов Хилла. Это может быть обусловлено несколькими причинами. Как уже отмечалось, в настоящей работе используется относительно грубая сетка. Кроме того, возможно, что несмотря на низкое значение числа Маха ($M = 0.2$), при котором проведены расчеты, эффекты сжимаемости все же оказывают некоторое влияние на полученные результаты (напомним, что в экспериментах в качестве рабочей среды использовалась вода, а расчеты Хилла выполнены в рамках модели несжимаемой жидкости). Для оценки возможных погрешностей, обусловленных грубостью сетки, проведенные расчеты были повторены на

более мелкой сетке с размером 150×112 узлов (использование более мелкой сетки требовало слишком большой оперативной памяти), а для выяснения роли эффектов сжимаемости, была проведена серия расчетов рассматриваемого течения при различных значениях числа Маха.

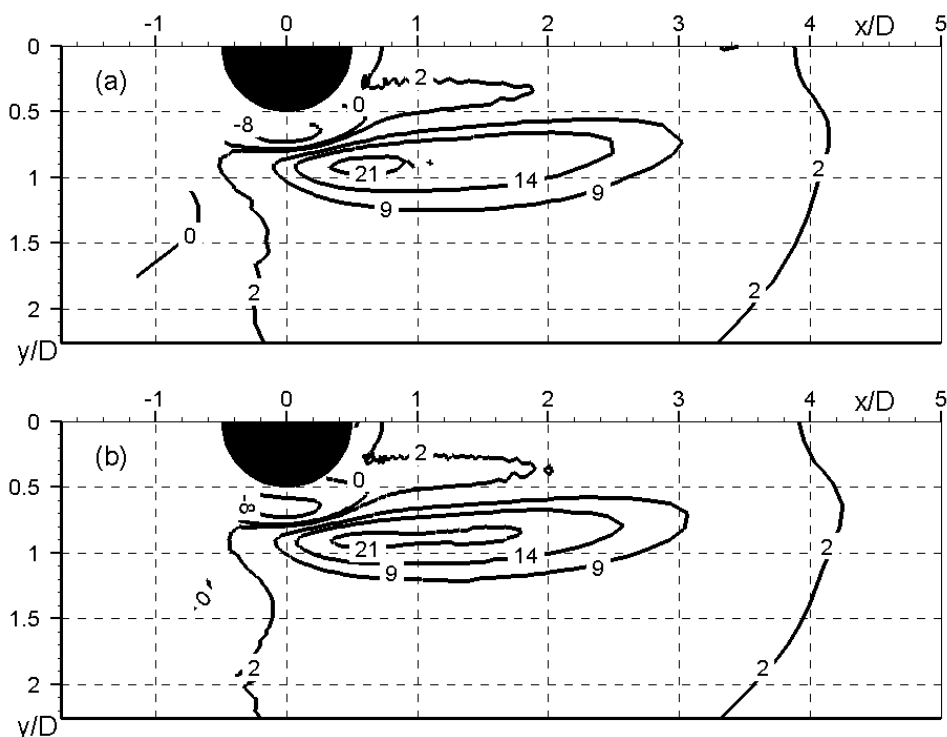


Рис. 3.22. Влияние размера сетки на сдвиг критического числа Рейнольдса $\Delta Re_c(x, y)$. (a) – сетка 120×100 ; (b) – 150×112

На рис. 3.22 представлено сравнение полей сдвига критического числа Рейнольдса, полученных на грубой и мелкой сетках. Следует отметить, что хотя выполненное измельчение сетки кажется не слишком значительным, вблизи основного цилиндра (то есть, в области больших градиентов величины сдвига критического числа Рейнольдса) оно является достаточно сильным (не менее, чем в полтора раза, в обоих направлениях). Тем не менее, это не приводит к сколько-нибудь заметному изменению поля сдвига критического числа Рейнольдса. Количественно об этом можно судить по данным о влиянии сетки на минимальную и максимальную величину сдвига, представленным в таблице 3.4.

Таким образом, можно заключить, что использовавшаяся в основной серии расчетов сетка 120×100 обеспечивает достаточно высокую точность решения.

Таблица 3.4 Зависимость максимального и минимального изменения критического числа Рейнольдса от размера расчетной сетки

Сетка	M	$\min(\Delta Re_c)$	$\max(\Delta Re_c)$	$\max(\Delta Re_c)$, эксп.
120×100	0.2	-13.4	22.7	> 24
150×112	0.2	-13.3	22.5	

Таблица 3.5. Зависимость максимального и минимального изменения критического числа Рейнольдса от числа Маха набегающего потока

M	$\min(\Delta Re_c)$	$\max(\Delta Re_c)$	$\max(\Delta Re_c)$, эксп.
0.3	-12.9	22.2	> 24
0.2	-13.4	22.7	
0.1	-13.4	22.9	

Что касается зависимости сдвига критического числа Рейнольдса от числа Маха набегающего потока, то как видно из рис. 3.23 и таблицы 3.5, в рассмотренном диапазоне чисел Маха эта зависимость является слабой.

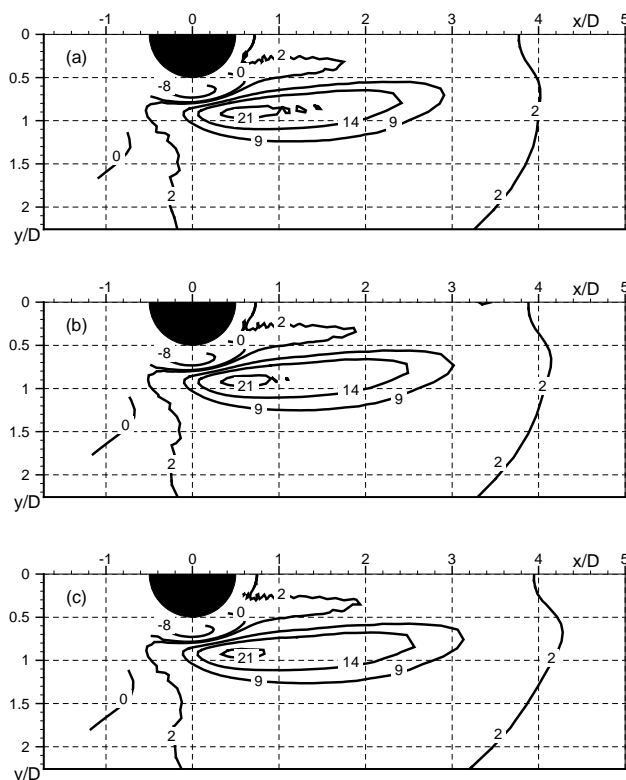


Рис. 3.23. Влияние числа Маха набегающего потока на сдвиг критического числа Рейнольдса $\Delta Re_c(x, y)$. (a) – M=0.1, (b) – M=0.2, (c) – M=0.3

Таким образом, проведенные численные эксперименты свидетельствуют о том, что количественное рассогласование результатов расчета с экспериментом не связано ни с вычислительными погрешностями, обусловленными грубостью используемой сетки, ни с влиянием сжимаемости и объясняется какими-либо другими причинами.

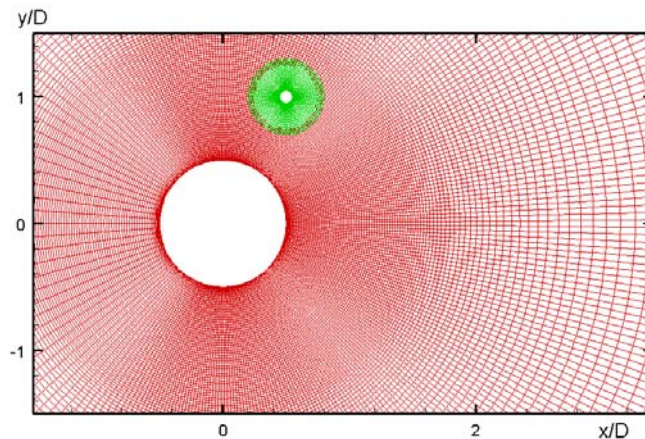


Рис. 3.24. Двухблочная сетка, использовавшаяся для численного интегрирования нестационарных уравнений Навье-Стокса.

С целью выяснения этих причин для положения малого цилиндра $(x, y) = (0.5, 1.0)$ при котором имеет место максимальная стабилизация течения, были выполнены исследования устойчивости рассматриваемого течения с использованием нескольких различных подходов. В частности, были проведены расчеты данного течения на основе численного интегрирования нестационарных уравнений Навье-Стокса на двухблочной сетке, показанной на рис. 3.24, в рамках ЛТУ на более грубой двухблочной сетке (использование в этом случае той же сетки было невозможно из-за ограниченного объема оперативной памяти), а также в рамках ЛТУ с моделированием малого цилиндра объемной силой, определяемой формулой (3.5). При этом в случае решения нестационарных уравнений Навье-Стокса для определения критического числа Рейнольдса проводилась серия расчетов при различных числах Рейнольдса с шагом 3.0 (критическое число Рейнольдса определялось при этом как среднее арифметическое между двумя соседними значениями, соответствующими стационарному и нестационарному решениям). Данные по

критическому значению числа, полученные с помощью всех рассмотренных подходов, представлены в таблице 3.6.

Таблица 3.6 Критическое число Рейнольдса обтекания двух цилиндров, полученное с помощью различных подходов

Подход	Re_c
Эксперимент <i>Strykowski, Sreenivasan, 1990</i>	>70
Решение уравнений Н.-С. с разрешением обоих цилиндров на двухблочной сетке $283 \times 159 + 103 \times 31$	78.5
Анализ линейной устойчивости с разрешением обоих цилиндров на двухблочной сетке $123 \times 101 + 83 \times 31$	81
Анализ линейной устойчивости с моделированием малого цилиндра объемной силой на сетке 123×101	55
Приближенная методика оперативной оценки с моделированием малого цилиндра объемной силой на сетке 120×100	66

Как видно из этой таблицы, значения критического числа Рейнольдса, полученные в результате решения уравнений Навье-Стокса и на основе ЛТУ с разрешением обоих цилиндров близки между собой (небольшое различие между ними можно объяснить использованием различных сеток) и согласуются с экспериментом. Моделирование малого цилиндра с помощью объемной силы в рамках ЛТУ приводит существенному занижению критического числа Рейнольдса. Наконец, использование ЛТУ в сочетании с допущением о малости объемной силы позволяет получить несколько лучшее согласование с экспериментом, что можно объяснить лишь происходящей при этом компенсацией ошибок.

Таким образом, проведенные исследования позволяют заключить, что основная погрешность описанной в разделе 1.3 приближенной методики оценки устойчивости при решении рассматриваемой задачи связана с моделированием малого цилиндра объемной силой. Тем не менее, как уже отмечалось (см. рис. 3.21), эта методика позволяет с приемлемой точностью оценить влияние местоположения второго цилиндра на устойчивость системы при несоизмеримо меньших вычислительных затратах, чем более точные

методы, базирующиеся на решении уравнений Навье-Стокса и на анализе линейной устойчивости системы двух цилиндров.

В заключение следует отметить, что описанные выше результаты решения уравнений Навье-Стокса для задачи о двух цилиндрах оказываются весьма полезными с точки зрения объяснения механизма стабилизирующего или дестабилизирующего воздействия малого цилиндра на рассматриваемое течение. В качестве иллюстрации на рис. 3.25 сравниваются мгновенные поля завихренности, полученные при решении уравнений Навье-Стокса при числе Рейнольдса $Re = 100$ для случая обтекания одиночного цилиндра и при двух положениях малого цилиндра: $(x, y) = (0.5, 1.0)$ (стабилизирующее воздействие) и $(x, y) = (0.5, 0.65)$ (дестабилизирующее воздействие). Из рисунка видно, что стабилизирующее воздействие малого цилиндра на течение наблюдается тогда, когда он расположен на периферии слоя смешения основного цилиндра (рис. 3.25b), а дестабилизация течения имеет место, когда малый цилиндр непосредственно попадает в этот слой смешения (рис. 3.25c). В первом случае происходит уменьшение завихренности в основном слое смешения, что приводит к демпфированию его колебаний, а во втором, наоборот, - увеличение завихренности и усиление колебаний.

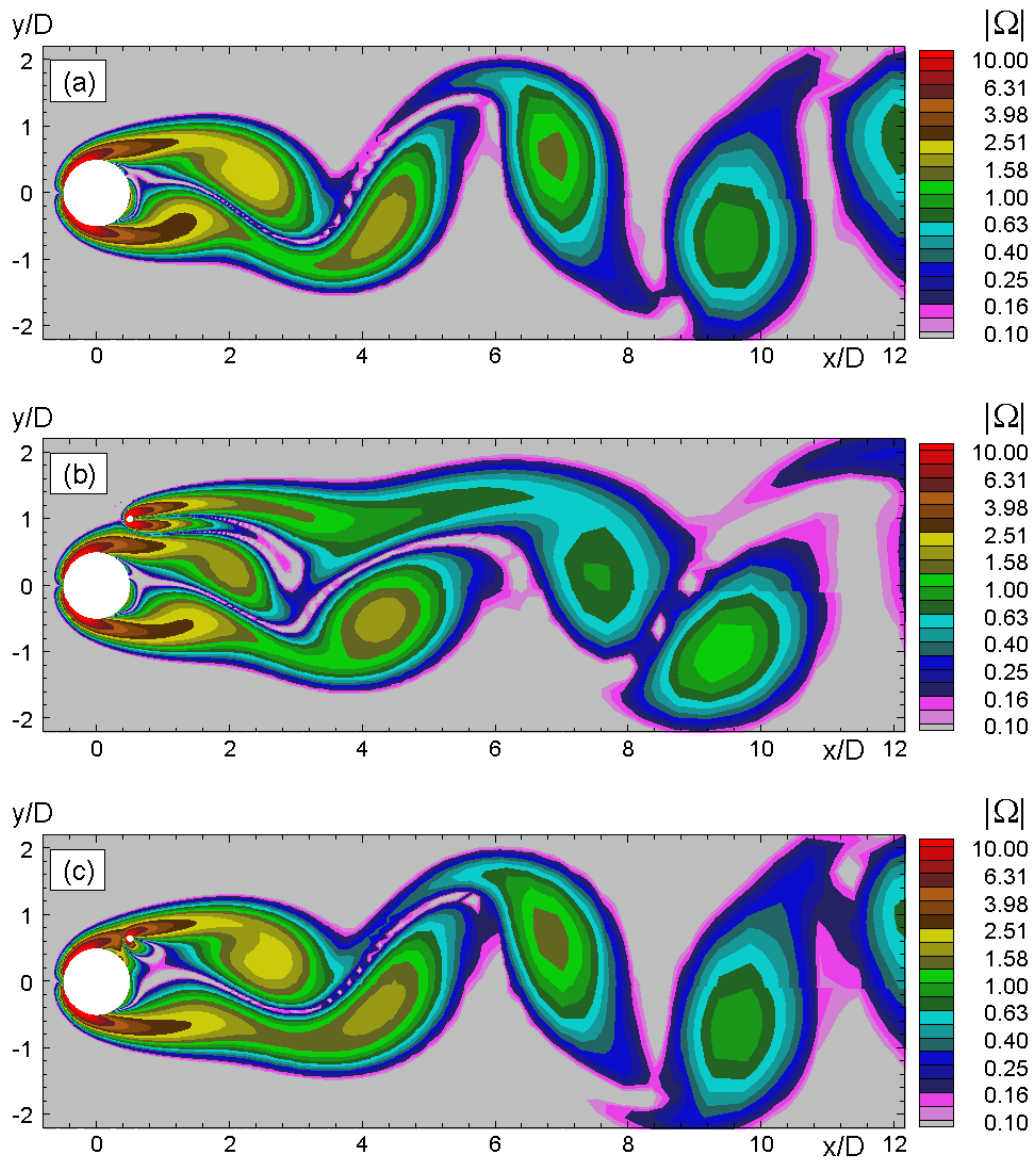


Рис. 3.25. Мгновенная картина поля модуля завихренности при $Re=100$:
 (a) – одиночный цилиндр; (b) - два цилиндра $(x, y) = (0.5, 1.0)$;
 (c) - два цилиндра $(x, y) = (0.5, 0.65)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты проведенных исследований состоят в следующем.

1. Разработан и реализован комплекс базирующихся на линейной теории устойчивости вычислительных алгоритмов для определения условий развития глобальных автоколебаний в ламинарных и турбулентных двумерных и квазитрехмерных потоках.

2. Разработана и реализована приближенная методика оперативной оценки эффективности методов управления устойчивостью путем внесения в поток малых возмущений.

3. Проведена верификация разработанного математического аппарата на примере решения задачи об определении условий начала колебаний следа при ламинарном обтекании цилиндра.

4. Проведено исследование устойчивости ламинарного обтекания круглого цилиндра при ненулевом угле скольжения и показано, что критическое число Рейнольдса, соответствующее началу автоколебаний следа в таком течении, определяется нормальной к оси цилиндра составляющей скорости набегающего потока.

5. Проведено исследование условий начала трансзвукового бафтинга при турбулентном обтекании аэродинамических профилей. При этом показано, в частности, что результаты, полученные с помощью ЛТУ, хорошо согласуются с результатами численного интегрирования нестационарных уравнений Рейнольдса, которое требует существенно больших вычислительных затрат.

6. С помощью разработанной приближенной методики оперативной оценки эффективности метода управления устойчивостью путем внесения в поток малых возмущений построена “карта” сдвига критического числа Рейнольдса для обтекания цилиндра, в след которого помещен другой цилиндр малого диаметра. На основе сопоставления этих результатов с экспериментальными данными и с результатами более точных подходов, полученными в диссертации, показано, что разработанная методика позволяет при относительно небольших вычислительных затратах получить достаточно

надежную информацию об эффективности воздействия на устойчивость течения в зависимости от точки его приложения.

Таким образом, полученные в диссертации результаты подтверждают реальную возможность и эффективность использования методов, базирующихся на классической линейной теории устойчивости, для решения широкого круга двумерных и квазитрехмерных задач, связанных с определением условий возникновения глобальных автоколебаний потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андерсон, Д.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Т. 2: [Пер. с англ.] / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М.: Мир., 1990.
2. **Варапаев, В. Н.** О влиянии непараллельности на устойчивость струи Бикли-Шлихтинга / В. Н. Варапаев, Ю. М. Штемлер, В. И. Ягодкин // Изв. АН. СССР, Механика жидкости и газа. – № 6. – 1973. – С. 139-141.
3. **Гапонов, С. А.** Развитие возмущений в сжимаемых потоках / С. А. Гапонов, А. А. Маслов // Новосибирск: Наука. – 1980.
4. **Герценштейн, С. Я.** О возмущениях конечной амплитуды в пограничном слое / С. Я. Герценштейн, Ю. М. Штемлер // Изв. АН. СССР, Механика жидкости и газа. – № 1. – 1976. – С. 150-153.
5. **Герценштейн, С. Я.** Устойчивость осесимметричного сжимаемого невязкого следа / С. Я. Герценштейн, А. В. Кашко // Науч. тр. Ин-та мех. МГУ. – 1972. – № 19. – С. 142–150.
6. **Голуб, Дж.** Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. М.: Мир, 1999.
7. **Денисихина, Д. М.** Численное моделирование автоколебаний турбулентной струи, истекающей в прямоугольную полость / Д. М. Денисихина, И. А. Бассина, Д. А. Никулин, М. Х. Стрелец // ТВТ. – 2005. – Том 43, №4. – С. 568-579.
8. **Егоров, И. В.** Численное моделирование распространения возмущений в сверхзвуковом пограничном слое / И. В. Егоров, В. Г. Судаков, А. В. Федоров // Изв. РАН. МЖГ. – 2004. – № 6. – С. 33-44.
9. **Линь, Ц. Ц.** Теория гидродинамической устойчивости / Ц. Ц. Линь // М.: Издательство Иностранной Литературы, 1958.
10. **Маслов, А. А.** Устойчивость гиперзвукового ударного слоя на плоской пластине / А. А. Маслов, С. Г. Миронов, Т. В. Поплавская, Б. В. Смородский. // Изв. РАН. МЖГ. – 2004. – № 2. – С. 16-23.

11. **Тюменцев, В. А.** Исследование боковой односторонней воздушной завесы без подогрева воздуха / В. А. Тюменцев // Автореферат дисс. Иркутск, 2004
12. **Устинов, М. В.** Восприимчивость пограничного слоя на линии растекания наклонно обтекаемого цилиндра к вихревым возмущениям / М. В. Устинов // Изв. РАН. МЖГ. – 2004. – № 6. – С. 72-85.
13. **Baldwin, B.** Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flow / B. Baldwin, H. Lomax // AIAA 78-257, 1978.
14. **Barakos, G.** Numerical simulation of transonic buffet flows using various turbulence closures / G. Barakos, D. Drikakis // Int J Heat Fluid Flow 2000;21(5):620–6.
15. **Barkley, D.** Three-dimensional instability in flow over a backward facing step / D. Barkley, G. Gomes, R. D. Henderson // J Fluid Mech 2002;473:167–90
16. **Bartels, R. E.** Cryogenic tunnel pressure measurements on a supercritical airfoil for several shock buffet conditions / R. E. Bartels, J. W. Edwards // NASA TM 110272, National Aeronautics and Space Administration, 1997.
17. **Bartels, R. E.** Flow and turbulence modeling and computation of shock buffet onset for conventional and supercritical airfoils / R. E. Bartels // NASA TP-1998-206908, National Aeronautics and Space Administration, 1998.
18. **Bottaro, A.** The effect of base flow variation on flow stability / A. Bottaro, P. Corbett, P. Luchini // J Fluid Mech, Vol. 476, 2003, pp. 293-302
19. **Broadhurst, S. M.** Spectral element stability analysis of vortical flows / S. M. Broadhurst, V. Theofilis, S. J. Sherwin // IUTAM Laminar-turbulent transition. 2004.
20. **Crouch, J.** Localized receptivity of boundary layers / J. Crouch // Phys. Fluids A, (1992), pp. 1408–1414.
21. **Crouch, J. D.** Private communication. 2004.
22. **Daris, T.** Four-equations models for Reynolds stress and turbulent heat flux predictions / T. Daris, H. Berzard // In: Proceedings, 12th International Heat Transfer Conference, Grenoble, France, August 18–23, 2002.

23. **Deck, S.** Numerical simulation of transonic buffet over a supercritical airfoil / S. Deck // AIAA J 2005; 43(7):1556–66.
24. **Demmel, J. W.** A supernodal approach to sparse partial pivoting / J. W. Demmel, S. C. Eisenstat, J. R. Gilbert, X. S. Li, J. W. H. Liu // SIAM J. Matrix Analysis and Applications 1999, 20(3): 720-755.
25. **Dobrinsky, A.** Adjoint parabolized stability equations for receptivity prediction / A. Dobrinsky, S. S. Collis // AIAA-2000-2651
26. **Dovgal, A. V.** Laminar boundary layer separation: instability and associated phenomena / A. V. Dovgal, V. V. Kozlov, A. Michalke // Prog Aerosp Sci 1994;30:61 - 94.
27. **Durbin, P. A.** A Perspective on recent developments in RANS modelling / P. A. Durbin // Proceedings of 5th Int. Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements, Mallorca, Spain, Sept. 16-18, 2002. Elsevier. 2002. P. 3-16.
28. **Durbin, P. A.** Separated flow computations with the $k-\varepsilon-v^2$ model / P. A. Durbin // AIAA J., 33, No.4, 1995, pp. 659-664
29. **Ehrenstein, U.** On the linear stability of channel flows over riblets / U. Ehrenstein // Phys Fluids 1996;8:3194–6.
30. FLOMANIA – A European Initiative on Flow Physics Modelling / eds.: W. Haase, B. Aupoix, U. Bunge, D. Schwamborn. – 2006.
31. **Franke, R.** Calculation of vortex shedding past a square cylinder with various turbulence models / R. Franke, W. Rodi // 8-th Turbulent Shear Flow Symp., Munich, 1991.
32. **Gaster, M.** On the generation of spatially growing waves in a boundary layer / M. Gaster // J Fluid Mech 1965; 22: 433–441.
33. **Gaster, M.** On the effects of boundary layer growth on flow stability / M. Gaster // J. Fluid Mech. 1974. 66:465–80.
34. **Gaster, M.** Large-scale structures in a forced turbulent mixing layer / M. Gaster, E. Kit, I. Wygnanski // J Fluid Mech 1985; 150:23-39
35. **Greenblatt, D.** The control of flow separation by periodic excitation / D. Greenblatt, I. J. Wygnanski // Prog Aerosp Sci 2000;36:487–545.

36. **Hall, P.** On the instability of a three-dimensional attachment-line boundary layer: weakly nonlinear theory and a numerical approach / P. Hall, M. R. Malik // *J Fluid Mech* 1986;163:257–82.
37. **Hammache, M.** An experimental study of the parallel and oblique vortex shedding from circular cylinders / M. Hammache, M. Gharib // *J. Fluid. Mech.*, 232, pp. 567–590, 1991.
38. **Hammond, D. A.** Local and global instability properties of separation bubbles / D. A. Hammond, L. G. Redekopp // *Eur J Mech B* 1998;17:145–64.
39. **Hill, D. C.** A theoretical approach for analyzing the restabilization of wakes / D. C. Hill // *AIAA Paper*, AIAA-92-0067, 1992.
40. **Hill, D. C.** Adjoint systems and their role in the receptivity problem for boundary layers / D. C. Hill // *J. Fluid Mech.*, 292:183–204, 1995.
41. **Hirsch, Ch.** Numerical computation of internal & external flows. (Wiley series in numerical methods in engineering) / Ch. Hirsch // A Wiley-Interscience publication. 1988.
42. **Hussain, A. K. M. F.** The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow / A. K. M. F. Hussain, W. C. Reynolds // *J. Fluid Mech.* 1970, Vol. 41, part 2, pp. 241 – 258.
43. **Jackson, C. P.** A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies / C. P. Jackson // *J Fluid Mech* 1987;182:23–45.
44. **Jacquin, L.** Instability and unsteadiness of aircraft wake vortices / L. Jacquin, D. Fabre, D. Sipp, V. Theofilis, H. Vollmers // *Aerosp Sci Technol* 2003; 7: 577–593.
45. **Johanansson, S.** Numerical simulation of the vortex shedding past triangular cylinders at high Reynolds numbers using a $k-\varepsilon$ turbulence model / S. Johanansson, L. Davidson, E. Olsson // *Int.J.Num.Meth. in Fluids*, Vol. 16, No. 6, pp.859-878,1993
46. **Joslin, R. D.** Direct simulation of evolution and control of three-dimensional instabilities in attachment-line boundary layers / R. D. Joslin // *J Fluid Mech* 1995;291:369–92.

47. **Joslin, R. D.** A self-contained, automated methodology for optimal flow control / R. D. Joslin, M. D. Gunzburger, R. A. Nicolaides, G. Erlebacher, M. Y. Hussaini // *AIAA J.* 35 (1997) 816–824.
48. **Lasseigne, D. G.** Towards understanding the mechanism of receptivity and bypass dynamics in laminar boundary layers / D. G. Lasseigne, W. O. Criminale, R. D. Joslin, T. L. Jackson // NASA CR 1999-209553, ICASE Report No. 99-37, 1999.
49. **Launder, B. E.** Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disk / B. E. Launder, B. I. Sharma // *Lett. Heat Mass Transfer* 1, 131–138. 1974.
50. **Lee, B. H. K.** Oscillatory shock motion caused by transonic shock boundary layer interaction / B. H. K. Lee // *AIAA J* 1990; 28(5):942–4.
51. **Lee, B. H. K.** Self-sustained shock oscillations on airfoils at transonic speeds / B. H. K. Lee // *Progress in Aerospace Sciences* 37 (2001) 147–196
52. **Lees, L.** Stability of laminar boundary layers and wakes at hypersonic speeds. Part 1. Stability of laminar wakes / L. Lees, H. Gold // In: *Fundamental Phenomena in Hypersonic Flow. Pros. of Intern. Symposium. Buffalo, N. Y., Cornell Univ. Press, 1964, N 4, p. 310-337.*
53. **Lehoucq R. B.** ARPACK user's guide / R. B. Lehoucq, D. C. Sorensen, C. Yang // SIAM publication, 1998.
54. **Levy Jr., L. L.** Experimental and computational steady and unsteady transonic flows about a thick airfoil / L. L. Levy Jr. // *AIAA J* 1978;16(6):564–72.
55. **Lin, R.-S.** On the stability of attachment-line boundary layers. Part 2. the effect of leading-edge curvature / R.-S. Lin, M. R. Malik // *J Fluid Mech* 1996;333:125–37.
56. **Mack, L. M.** Linear stability theory and the problem of supersonic boundary-layer transition / L. M. Mack // *AIAA J.*, 1975, v. 13, N 3, p. 278-289.
57. **McDevitt, J. B.** Supercritical flow about a thick circular arc airfoil / J. B. McDevitt // NASA-TM-78549, National Aeronautics and Space Administration, January 1979.

58. **McDevitt, J. B.** Static and dynamic pressure measurements on a NACA 0012 airfoil in the Ames High Reynolds Number Facility / J. B. McDevitt, A. F. Okuno // NASA TP-2485. National Aeronautics and Space Administration, 1985.
59. **Mendonca, F.** CFD prediction of narrowband and broadband cavity acoustics at $M=0.85$ // F. Mendonca, R. Allen, J. Charentenay, D. Kirkham // AIAA-2003-3303
60. **Menter, F. R.** Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications / F. R. Menter // AIAA Journal 32 (8), 1598–1605. 1994.
61. **Nagano, Y.** A two equation model for heat transport in wall turbulent shear flows / Y. Nagano, C. Kim // J. Heat Transfer 110, 583–589. 1988.
62. **Orszag, S. A.** Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation / S. A. Orszag // J Fluid Mech 1971;50:689–703.
63. **Pierrehumbert, R. T.** A universal shortwave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid / R. T. Pierrehumbert // Phys Rev Lett 1986;57:2157–9.
64. **Reau, N.** Harmonic perturbations in turbulent wakes / N. Reau, A. Tumin // AIAA Journal, Vol. 40, No. 3, March 2002.
65. **Reynolds, W. C.** The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part 3. Theoretical models and comparisons with experiments / W. C. Reynolds, A. K. M. F. Hussain // J. Fluid Mech. 1972, Vol. 54, Part 2, pp. 263-288.
66. **Roe, P. L.** Approximate Riemann Solvers, Parameters Vectors and Difference Schemes / P. L. Roe // Journal of Computational Physics, 1981, Vol. 43, pp. 357-378.
67. **Rowley, C. W.** On self-sustained oscillations in two-dimensional compressible flow over rectangular cavities / C. W. Rowley, T. Colonius, A. J. Basu // J Fluid Mech 2002; 455:315–346.
68. **Rumsey, C. L.** Efficiency and accuracy of time-accurate turbulent Navier-Stokes computations / C. L. Rumsey, M. D. Sanetrik, R. T. Biedron, N. D. Melson, E. B. Parlette // Comput Fluids 1996; 25(2):217–236.

69. **Seifert, A.** Oscillatory excitation of unsteady compressible flows over airfoils at flight Reynolds numbers / A. Seifert, L. G. Pack // AIAA 99-0925, 37th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, January 1999.
70. **Sen, P. K.** Hydrodynamic stability theory and wall turbulence / P. K. Sen, S. V. Veervalli // Current Science, Vol. 79, No. 6, 25 September 2000.
71. **Sen, P. K.** Behaviour of organized disturbances in fully developed turbulent channel flow / P. K. Sen, S. V. Veervalli // *Sadhana*, Vol. 25, Part 5, October 2000, pp. 423-437.
72. **Shur, M. L.** Navier-Stokes simulation of shedding turbulent flow past a circular cylinder and a cylinder with a backward splitter plate / M. L. Shur, P. R. Spalart, M. Kh. Strelets, A. K. Travin // In: Desideri G.A., Hirsch C., Le Tallec P., Pandolfi M. and Periaux J. (eds). Third ECCOMAS CFD Conference, Paris, September. John Wiley & Sons, Chichester, 1996. pp. 676-682
73. **Shur, M.** High-order implicit multi-block Navier-Stokes code: ten-year experience of application of RANS/DES/LES/DNS to turbulence / M. Shur, M. Strelets, A. Travin // 7th Symposium on Overset Grids & Solution Technology October 5-7, 2004, Huntington Beach, CA, USA.
74. **Sofialidis, D.** Development of a non-linear strain-sensitive $k-\omega$ turbulence model / D. Sofialidis, P. Prinos // In: Proceedings of the 11th Symposium on Turbulent Shear Flows, TSF-11, Grenoble, France, p2-89±p2-94. 1997.
75. **Spalart, P. R.** A one-equation turbulence model for aerodynamic flows / P. R. Spalart, S. R. Allmaras // AIAA paper, 92-0439, 1992.
76. **Spalart, P. R.** Comments on the feasibility of LES for wings and on a hybrid RANS/LES approach / P. Spalart, W. H. Jou, M. Strelets, S. R. Allmaras // Proceedings of the 1st AFSOR International Conference on DNS/LES, edited by C. Liu and Z. Liu, Greyden, Columbus, OH, 1998, pp. 137–147.
77. **Stanewsky, E.** Experimental investigation of buffet onset and penetration on a supercritical airfoil at transonic speeds / E. Stanewsky, D. Basler // AGARD CP-483, Aircraft dynamic loads due to flow separation, Sorrento, Italy, 1–6 April. 1990. p. 4.1 - 11.

78. **Strelets, M.** Detached Eddy Simulation of massively separated flows” / M. Strelets // AIAA Paper 2001-0879, 2001
79. **Strykowski, P. J.** On the formation and suppression of vortex 'shedding' at low Reynolds numbers / P. J. Strykowski, K. R. Sreenivasan // Journal of Fluid Mechanics, 1990, Vol.218, pp.71–107.
80. **Tatsumi, T.** Stability of the laminar flow in a rectangular duct / T. Tatsumi, T. Yoshimura // J Fluid Mech 1990;212:437–49.
81. **Theofilis, V.** Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows / V. Theofilis // Prog Aerosp Sci 2003;39:249–315.
82. **Theofilis, V.** Viscous linear stability analysis of rectangular duct and cavity flows / V. Theofilis, P. W. Duck, J. Owen // J Fluid Mech 2004; 505:249–286.
83. **Theofilis, V.** On the origins of unsteadiness and three-dimensionality in a laminar separation bubble / V. Theofilis, S. Hein, U. Ch. Dallmann // Philos Trans R Soc London A 2000;358:3229–46.
84. **Thiery, M.** Numerical prediction of shock induced oscillations over a 2D airfoil: Influence of turbulence modelling and test section walls / M. Thiery, E. Coustols // Int. J. Heat and Fluid Flow 27 (2006) 661–670.
85. **Tijdeman, H.** Investigation of the transonic flow around oscillating airfoils / H. Tijdeman // NLR TR 77090 U, National Aerospace Laboratory, The Netherlands, 1977.
86. **Tollmien, W.** Uber die Entstehung der Turbulenz / W. Tollmien // Nach Ges Wiss Gottingen, 1929; 21–44.
87. **van Leer, B.** Upwind-difference methods for aerodynamic problems governed by the Euler equations / B. van Leer // in: Large Scale Computations in Fluid Mechanics, Lectures in Appl. Math. 22, II, Eds. B. Enquist, S. Osher, R. Somerville, AMS, Providence, RI, pp. 327-336, 1985.
88. **Zebib, A.** Stability of viscous flow past a circular cylinder / A. Zebib // J Eng Math 1987;21:155–65.
89. **Zhigulev, V. N.** Boundary layer receptivity to acoustic disturbance / V. N. Zhigulev, A. V. Fedorov // Zh Prikl Mekh Tekh Fiz 1987; 1:30-37.

90. **Zhigulev, V. N.** Generation of instability waves in a boundary layer by external turbulence / V. N. Zhigulev, N. V. Sidorenko, A. M. Tumin // Zh Prikl Mekh Tekh Fiz 1980; 6:43-49.